





Eques Boronus Cormen delin. Jac. Meromer sculp.

DE
SECTIONIBUS CONICIS

AUCTORE

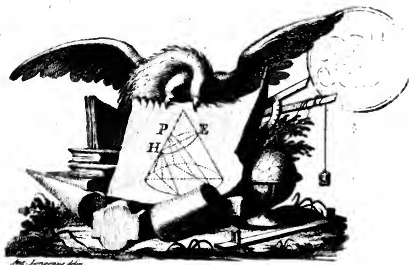
ANTONIO LECCHIO

E SOCIETATE JESU,

MATHESEOS PROFESSORE

IN

UNIVERSITATE BRAYDENSI.



MEDIOLANI MDCCLVIII.

EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ

APUD JOSEPH MARELLUM

SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.



MARIÆ THERESIÆ
REGINÆ AUGUSTÆ

ANTONIUS LECCHIUS E SOC. JESU.



Mnes, qui regendis, formandisque Imperiis animum adjicere volunt, providere debent, ut pacis, belliqueſtudia tueantur æque ac protegant; quorum ſi unum ab altero diſſo-

cietur, mancum, & debile futurum Imperii regimen nemo non videt. Utrumque conspiret necesse est. Pacis artes nervi sunt gerendi belli; at bella foris gesta pacis artes domi sustentant, & fovent.

Utramque regendi Imperii gloriam complexa es, Augusta Regina; utriusque artibus felicitati populorum consuluisti. Nam & disciplina bellica per Te novis sanctionibus restaurata est, & scientia militaris melioribus aucta est & institutis, & legibus. Unam eamdemque formam militarium exercitationum Austriacis legionibus imperasti, quæ antea in singulis varia, & multiplex habebatur; motusque varios uno imperio, una lege cieri sanxisti. Suus veteranis militibus retentus honorum gradus, & large propositis præmiis excitati adolescentes, ut ad honores, gloriamque eniti velint, ac possint. Quid? quod horum infantiæ, & educationi etiam prospexisti, excitatis in Austria Collegiis, in quibus, tan-

quam

quam in Martis palæstra, ab ineunte ætate ad militarem scientiam informarentur. Hinc factum est, ut qui Austriacum hodie exercitum viderit sive castra metari, sive cum hoste congredi, Romanos illos exercitus gentium victores videre sibi videatur.

Verum enim vero, num Te isthæc belli studia a pacis artibus aut revocarunt, aut retardarunt? Immo vero, hoc ipso tempore, quo Te circumstat tanta belli moles, quantam retroactis sæculis nunquam vidimus, aut legimus, artium omnium studia, quæ jacere sentiebas, præteritorum bellorum metu perculsa, atque prostrata excitare pergis, commercio ubique terra marique patefacto.

Quid dicam de liberalibus disciplinis, quæ aureæ illius ætatis prærogativam, & decus Tuo sub Imperio consequutæ jam sunt? Et sane omnes, qui ab hac Tua urbium principe, & domicilio Imperii ad Insubriam re-

revertuntur, narrant Academias veteres abs Te ad meliorem formam revocatas, novasque institutas; narrant amplissimis stipendiis accitos doctissimos quosque ex omnibus Imperii Tui plagis; narrant Lycæa instituendæ juventuti exædificata, Musæa locupletata, sive ad omnem antiquitatis memoriam præstantissimis numismatis explicandam, sive ad naturalem scientiam amplificandam eruditâ, peregrinâque rerum naturalium supellectile undequumque terrarum abs Te conquisitâ, comparatâque, sive ad mathematicas scientias, quas Tuo in Imperio, tanquam in proprio solo, florere jubes, instrumentis, machinis juvandas; narrant Orientalium quoque linguarum scientiam abs Te invectam, ac, qui easdem in Academiis profiterentur, Doctores evocatos.

Hac ego fama permotus, quæ jam percrebuit, & omnem Italiam peragravit, memet excitavi, ut in partem hujus gloriæ venirem, ac Sectionum Conicarum do-

ctri-

ctrinam, abditam illam quidem, & retrusam, sed Reipublicæ usui, & præsertim militari Architecturæ maxime utilem, inscriberem Tibi, Tuoque nomini, Regina Augusta, litterarum Parens Optima. Memineram quippe de Arenario Archimedem ad Heronem Regem scripsisse, de Architectura Vitruvium ad Augustum: Augusti autem exemplo magnos omni ætate Reges Mecœnates se præstitisse mathematicis Scriptoribus. Quanto fidentius me Tibi sisterem, commendationemque aliquam meis scriptis conciliarem ex Tuo nomine, Imperatrix Augusta, quæ Regum omnium, ac Cæsarum gloriam, litterarum tutelà superasti?

Quamobrem, quum Tibi hoc Opus inscriptum leges, Regina Augusta, velim cogites, non magis id meo me nomine facere, quam communi quodam studio tum Societatis nostræ, quæ Te Parentem agnoscit, tum Braydensis hujus Universitatis

vota

vota repræſentare, ut immortalis Deus hanc tantam publicæ rei felicitatem Tuo Conſilio, Fortitudine, Religione partam in Auguſtam Progeniem derivari magnis incrementis auctam, amplificatamque velit, jubeat.

LECTORI.



Uid conſilii cœperim in hiſce Conicis Elementis concinnandis, quid utilitatis, ac, niſi ſpe inani deludor, novitatis etiam fortaſſe attulerim, quam breviſſime dicam. Sectionum Conicarum doctrinam, uti paſſim tradi conſuevit ſive analytica, ſive ſynthetica methodo, pleriſque involutam, & operoſam videri inaudieram ſæpius. Itaque rem aggreſſus fidenti animo, antiquorum Geometrarum methodum ita cum recentiorum inventis contuli, ut, ſi qua planior mihi videretur, & extricatior via ad Conicas Sectiones, & aliis aperirem, & eamdem mihi ipſi ineundam præciperem. Videbam quantum compendii, & facilitatis accederet Conicis Elementis, ſi hujuſmodi Curvas, Parabolam nimirum, Ellipſim, atque Hyperbolam, non in Cono ſecto, a quo nomen traxere, conſiderandas mihi ducerem, ſed in plano poſitas; quod & alii præſtiterunt Geometræ, præeunte Wallíſio. Nam Solidorum conſideratio multo complicatior eſt, acrioremque vim imaginationis deſiderat. Verum enim vero vix animum inducere poteram, ut tritam ab Antiquis ſemitam, quantumvis arduam, penitus deſererem. Nam, cum ſive artis, ſive eruditionis ſit fon-

tes

tes nosse, unde summi Geometræ doctrinam suam hausisse putantur, feci non invitus, ut harum etiam Curvarum originem, Parabolæ, Ellipsis, atque Hyperbolæ, ac primaria saltem illarum symptomata ab ipso Cono deducerem.

Verum hisce quasi Prolegomenis modum statim definio; & seposito Cono, nulloque ad hujusmodi genesim respectu habito, totam Conicorum tractationem ex integro exorsus, Sectiones easdem, *quarum natura*, ut recte monet Wallisius, *magis absoluta est*, *quam ut ad Conum pertinere videatur*, tanquam totidem lineas curvas in plano describendas aggredior. Quare a simplici cujusvis Curvæ definitione proprietates singulas, tanquam e trunco erumpentes ramusculos, alios ex aliis connexos, derivare placuit multo simpliciore methodo, quam quæ ab antiquis Geometris adhiberetur; quorum consilium, quale fuerit, nihil sane ad hoc tempus, neque ad institutum meum.

Ut autem brevitati demonstrationum consulerem, quæ præcipua laus est facilitatis, nonnihil mihi ab ipsamet recentiorum Scriptorum ratione discedendum existimavi. Illi etenim affectiones, quas pluribus Curvis communes esse norunt, unica pariter demonstratione, quæ prolixior hac de causa solet esse, complecti consueverunt. Nec immerito; quippe hunc scribendi modum videbatur deductionis ordo, & Theorematum generalis forma requirere.

Aliud

Aliud mihi consilium nihilominus amplectendum proposui in gratiam eorum, quorum mens vel schematum varietate, vel Curvarum dissimilitudine distracta hæret, & fluctuat. Quamobrem singulas speciatim affectiones demonstrandas curavi, quo firmius in cujusvis Curvæ natura pedem figerent.

Theoremata præterea pulchritudine insigniora, & usu necessaria dumtaxat selegi; quod caput artis est in tractatione disciplinarum. Qui enim minutias omnes, & apices persequuntur, uti factitatum video a plerisque in Conicis Elementis, & multum de hujus doctrinæ dignitate detrahunt, & Lectorum abutuntur ingenio, & otio. Selectiora itaque Theoremata mihi demonstranda suscepi, quæ ad Catoptricam, & Dioptricam, ad projectorum motum determinandum, ad Balisticam, reliquasque scientias conducere censui. Præclare Tullius in lib. de Oratore cujusvis disciplinæ tradendæ artem modumque præscribit. *Sic enim statuo*, inquit ipse, *ut in cæteris artibus, cum tradita sunt cujusque artis difficillima, reliqua, quia aut faciliora, aut similia sint, tradi non oportere. Ut in pictura, qui hominis speciem pingere perdidicerit, posse eum cujusvis vel formæ, vel ætatis, etiamsi non didicerit, pingere. Neque est omnino ars ulla, in qua omnia, quæ illa arte effici possunt, a Doctore tradantur; sed qui primarum, & certarum rerum genera didicerunt, reliqua non incommode persequuntur.*



PROLEGOMENA
AD
SECTIONES CONI.

Synopsis.



Polloniana *genesis Coni, Euclidæà universalior, quæ conum* re-ctum, *&* scalenum, *& oppositos conos simplici descriptione complectitur. Sectio coni per verticem, & per axem. Sectio parallela basi. Sectio subcontraria. Sectionis cujusvis diameter. Sectio, cujus diameter parallela est lateri trianguli per axem; & dicitur* Parabola; *hujus primaria proprietas. Sectio, cujus diameter cum utroque latere trianguli per axem conveniat, & neque basi coni parallela sit, neque subcontrarie posita; & vocatur* Ellipsis; *hujus præcipua proprietas. Sectio, quæ dicitur* Hyperbola, *cujus dia-*

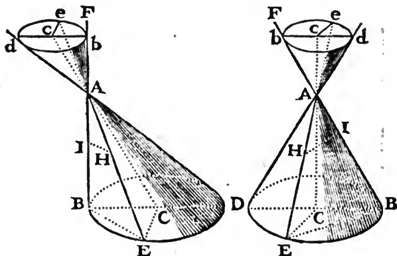
 meter

meter ita concurrat cum latere trianguli per axem infra verticem coni, ut producta conveniat in puncto alterius lateris supra verticem coni; hujus pariter curvæ primaria proprietas demonstratur.

DEFINITIO.

I. CONum *appello corpus, habens originem ex circumductu lineæ, a puncto in sublimi posito in infinitum protensæ, circa perimetrum circularem, quæ in plano diverso ab eodem puncto constituta sit.*

Si recta BAF, utrinque indefinite producta, transeat per punctum A, positum extra planum circuli BED; ac manente fixo eodem puncto A, recta BAF continuo motu percurrat ejusdem circuli peripheriam, donec eò redeat, unde moveri cœpit; utramque superficiem, quam generat, voco *Superficiem Conicam*; solidum ea inclusum, dico *Conum*; A punctum immotum, dico *Verticem*; circulum BED,



vel

vel *bed*, dico *Basim*; rectam AC transeuntem per verticem, & centrum circuli, voco *Axem*; qui si fuerit perpendicularis plano basis, conus dicetur *rectus*; secus, *scalenus*. Recta autem AB, motu suo generans superficiem conicam, dicitur *Latus coni*.

Scholion I.

2. *Acute monet P. Boscbovich in egregio opere Sectionum Conicarum, Geometras solere plerumque appellare conum id tantùm, quod inter verticem, & basim interjacet, reliquum vero ad oppositam partem*, conum oppositum. *At libet potius, inquit ipse, coni nomine appellare quidquid recta linea, quæ utrinque sine fine produci potest, gignit motu continuo circa circuli peripheriam; uti constabit, ubi de locis geometricis.*

Scholion II.

3. *Hoc loco occurrit etiam notandum, pluribus aliis viis conum describi posse; puta, circumducendo ex eodem puncto* A, *in sublimi posito, eamdem rectam* AB, *circa figuram ellipticam, aut quamlibet aliam e conicis. Sed placuit non sine causa Antiquis circulo solo uti, eò quod, ut in decursu apparebit, commodior figura sit ad demonstrationes conficiendas. Adde, quòd figurarum aliarum genesim ex ipso cono veteres Geometræ repetebant; quemadmodum ex hisce Prolegomenis constabit.*

Scholion III.

4. EUclides *in suis Elementis genesim coni universalem minime tradidit; nam voluit oriri conum*, quando trianguli rectanguli manente uno crurum, circumducitur crus alterum, donec redeat ad priorem locum.

Primus Apollonius genesim coni ad suam universalitatem evexit; uti constat ex præmissa definitione, in qua, præter conum Euclidæum, quem vocavit rectum, *adeptus est conum alium, quem* obliquum, *seu* scalenum *appellavit*.

5. *Duplex itaque est conus, alius dicitur* rectus, *& alius* scalenus. *Nam recta, quæ sublime punctum cum centro circuli conjungit, potest cum plano bujus tam rectos, quam obliquos angulos constituere. Itaque, cum ei insistit ad angulos rectos, conus dicendus est* rectus; *ubi vero insistit ad angulos obliquos*, obliquus, *seu* scalenus *conus ipse vocandus. In utroque autem cono recta illa, quæ conjungit sublime punctum cum centro circuli, dicitur* Axis *ipsius coni*.

Corollaria.

6. UTramque superficiem conicam BAD, *b*A*d*, oppositam ad verticem communem A, produci posse in infinitum, aperte jam constat ex genesi tradita.

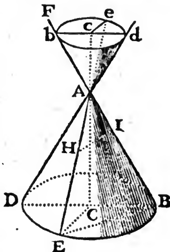
7. *Recta linea* AH, *a vertice coni ad quodvis superficiei conicæ punctum* H *ducta, in ipsa jacet superficie*. Cum enim superficies conica producta sit motu rectæ AE, per punctum A semper transeuntis, hæc linea motu suo aliquando per punctum H transibit; ac proinde conveniet cum recta AH.

8. *Quæ-*

8. *Quævis recta* AH, *quæ verticem* A *conjungat cum quovis puncto* H *superficiei conicæ, si producatur, necessario cadet in punctum* E *peripheriæ baseos.*

9. *Si linea* HI, *duo quælibet superficiei conicæ puncta* H *&* I *conjungens, per verticem* A *non transeat, intra conum cadet, & producta cadet extra.* Nam si a vertice A per puncta H & I ducantur duæ rectæ AH, AI, productæ basim attingent in E & B. Jungatur EB, quæ tota intra circulum cadet; Ergo planum trianguli ABE, secans basim coni, intra eumdem cadit; & consequenter etiam recta HI in eodem plano existens, & a duobus punctis H & I intercepta; quæ, si producatur, ex cono egredietur.

10. *Si conus per verticem* A *plano secetur, communis plani, & coni sectio erit triangulum.* Nam duæ rectæ AB, AE, vel AB, AD, quæ sunt sectiones communes superficiei conicæ, & planorum secantium ABE, vel ABD, semper ambæ convenient cum recta mobili AB, quæ in genesi superficiei conicæ transit per eadem puncta B, E, D. Similiter communis sectio plani secantis cum plano baseos est recta EB, vel BD; Ergo ABE, vel ABD sunt triangula rectilinea.



Itaque, si conus secetur plano, utcunque transeunte per *verticem*, sectio facta in cono, triangulum erit. Si vero planum transeat quoque per *axem* co-

ni, tunc recta, in qua illud occurrit plano baseos, erit istius diameter aliqua; ac proinde *triangulum per axem* super aliqua basis diametro semper insistet.

DEFINITIO.

11. *SI conus plano utcunque secetur, nova superficies, quæ in transitu bujus plani efficitur in cono, dicitur sectio conica;* cujus varias species pergam evolvere.

PROPOSITIO I.

12. *IN quolibet cono, sive recto, sive scaleno, quævis sectio* F H G, *basi* B E D *parallela, erit circulus, cujus centrum in ipso occursu axis cum eadem sectione.*

Demonstratio. Sit enim conus sectus insuper per axem plano, seu triangulo A B D; eruntque communes planorum parallelorum, & trianguli A B D sectiones B D, F G parallelæ. Ergo ex Elem. erit

AL:AC::FL:BC::LG:CD.

Posito autem quocunque alio plano A C E per axem, erit AL:AC::LH:CE;

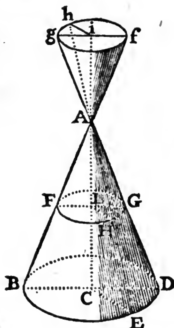
Itaque FL:BC::LG:CD::LH:CE.

Quare cum tres termini consequentes B C, C D, C E, ex definitione circuli sint æquales, etiam tres antecedentes F L, L G, L H æquales erunt; Ergo F H G erit circulus, cujus centrum est in axe A C. Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

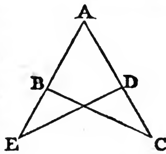
13. HInc coni sive recti, sive scaleni axis AC transit per centra omnium circulorum, qui basi coni sint paralleli, & conum secent. Quod opposito cono A*gf* similiter congruit.



DEFINITIO.

14. SUbcontraria positio duorum triangulorum, *est duorum triangulorum similium, & eumdem angulum verticalem habentium dispositio, qua bases nec congruentes, nec parallelas habent.*

Ut si triangula similia ABC, ADE, communem angulum A habentia, bases BC, DE parallelas non habeant, sed angulus ABC angulo ADE sit æqualis.



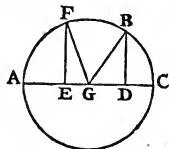
15. Subcontraria coni ſectio *ea eſt, qua conus ita ſecatur planis ad triangulum per axem rectis, ut fiant duo triangula ſubcontrarie poſita.*

LEMMA.

16. *SI in figura curvilinea perpendiculares ductæ ad aliquam rectam ab eadem figura terminatam, ita eam dividant, ut quadrata perpendicularium æqualia ſint rectangulis ſegmentorum, hæc figura erit circulus.*

Sit figura curvilinea, in qua ducantur DB, EF, perpendiculares ad AC; ſitque quadratum DB æquale rectangulo $AD \times DC$ ſub ſegmentis; Dico, figuram ABC eſſe circulum, & AC ejus diametrum.

Demonſtratio. Dividatur AC bifariam in G; ducaturque GB. Quoniam recta AC eſt diviſa bifariam in G, & non bifariam in D, erit (*n.* 513. *Geom. planæ*) $AD \times DC + \overline{GD}^2 = \overline{GC}^2$. Atqui, per hyp., $AD \times DC = \overline{DB}^2$; Ergo hoc ſubſtituto in prima æquatione, fiet $\overline{DB}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{GC}^2$. Eſt autem $\overline{DB}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{GB}^2$; Ergo quadrata GB, GC, AG ſunt æqualia, & conſequenter lineæ; Ergo ABC eſt circulus. Quod erat &c.



PROPOSITIO II.

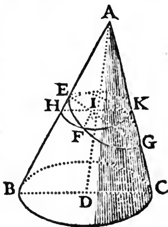
17. *IN cono ſcaleno alia quoque ſectio baſi non parallela, quæ dicitur ſubcontraria, eſt circulus.*

Sit

Sit conus ſcalenus ABC; ſitque ABC trianguli per axem planum, ad baſim coni rectum: ſecetur pariter idem conus plano EFG recto ad planum ABC; ſitque communis planorum ſectio linea EG; & triangulum AEG triangulo ABC ſimile, ſed ſubcontrarie poſitum; Dico, EFG, communem coni, & plani ſecantis ſectionem, circulum eſſe.

Ducatur enim in eo plano ſecante, recta IF perpendicularis ad EG, quæ erit perpendicularis plano ABC; tum ducatur per IF planum HFK parallelum baſi, cujus communis ſectio HIK erit parallela baſi, & per præced., HFK circulus.

Demonſtratio. Linea FI, communis ſectio utriuſque plani, perpendicularis eſt plano ABC; Ergo erit quoque perpendicularis ipſi HK, & media proportionalis inter HI & IK; ſeu quadratum FI æquale eſt rectangulo HIK. Atqui rectangulum EIG æquale eſt rectangulo HIK; ſunt enim triangula EIH, KIG ſimilia; cum anguli ad verticem in puncto I ſint æquales, & angulus EHI propter parallelas æqualis angulo B, qui per hyp. ſupponitur æqualis angulo EGK; Ergo EI:HI::IK:IG; Quare $EI \times IG = HI \times IK$; nimirum, rectangulum ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis; Ergo quadratum IF æquale eſt rectangulo EIG; ac proinde, per Lemma, figura EFG erit circulus. Quod &c.



Quæ

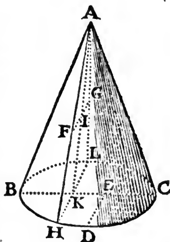
Quæ curvæ Sectionum Conicarum nomine vocentur, & quæ sit earum origo.

18. SEctionum conicarum nomine minime comprehenditur ab antiquis Geometris circulus, tametsi ex cono etiam deducatur. Ratio est, quia coni genesis, ut vidimus, circulum supponit; unde, si circulus ex cono esset deducendus, in eam labem incideremus, quam vitiosum circulum vulgus appellat. Ad reliquas itaque curvas progrediamur, quarum origo ex coni sectionibus deducitur, nimirum, Parabolæ, Ellipsis, & Hyperbolæ; sed quædam præmittenda sunt.

PROPOSITIO III.

19. *Omnis linea parallela rectæ perpendiculari ad basim trianguli per axem, occurrit ejus plano, ab eoque bifariam dividitur.*

Esto conus ABC sectus per axem plano, seu triangulo ABC, cujus basis BC, ad quam perpendicularis sit recta DE; tum ex quolibet superficiei conicæ puncto F ducatur FG parallela eidem rectæ DE: Dico, lineam FG occurrere plano ABC trianguli per axem, & productam utrinque ad superficiem conicam, dividi ab eo plano bifariam.



Demonstratio. Per pun-

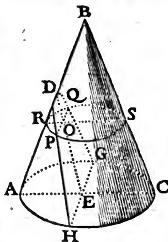
ctum F ex A ducatur recta AFH, secans basim in puncto H (*n.* 7.); ducaturque HKL perpendicularis ad BC, & consequenter parallela lineis DE, FG; tum jungatur AL & AK.

His positis, quoniam HK occurrit lineæ AK, etiam ipsi parallela FG, in eodem plano existens, occurret eidem in puncto scilicet I. Et rursum, cum AK sit communis sectio trianguli per axem, linea FI occurret plano trianguli per axem. Quod est primum.

Præterea, cum ita sit AK ad AI, ut HK ad FI, & ut KL ad IG, sintque HK & KL æquales, erunt quoque FI & IG æquales. Quod erat secundum.

PROPOSITIO IV.

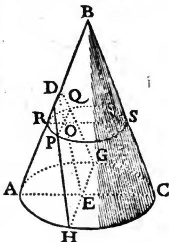
20. *Si conus* ABC *secetur per axem triangulo* ABC, *cujus basis* AC; *secetur præterea idem conus alio plano* HDG; *sitque* HG, *communis ejus sectio cum base coni, perpendicularis ad* AC *basim trianguli per axem; sit item communis sectio hujus secundi plani, & superficiei conicæ curva* HDG, *in qua ducatur* PQ *parallela ipsi* HG; *Dico, rectam* DE, *communem sectionem utriusque plani secantis, dividere bifariam* PQ, *omnesque lineas in hoc secundo plano ductas parallelas eidem perpendiculari* HG; *in cono quidem recto bifariam, &* per-



perpendiculariter, in cono scaleno bifariam, sed non semper perpendiculariter.

Demonstratio consequitur ex præcedente Theor. Nam linea PQ parallela perpendiculari HG, occurrit plano trianguli per axem, & ab eo bifariam dividitur; non occurrit autem huic plano, nisi in communi sectione utriusque plani, nempe DE; Ergo communis sectio DE dividit bifariam lineam PQ, & quamcunque illi parallelam.

Si triangulum per axem sit rectum ad basim coni, erit HE, quæ supponitur perpendicularis ipsi AC, erit, inquam, perpendicularis plano trianguli ABC; ac proinde angulus HED rectus erit. Cum autem PQ sit parallela ipsi HG, erit quoque angulus POE rectus. Quod in conis rectis semper verum est. Nam, cum axis semper rectus sit ad basim coni, omne planum per axem ad eamdem basim rectum erit. In scalenis autem id dumtaxat aliquando accidit.



DEFINITIO.

21. I. *Linea* DE, *quæ in quavis sectione conica* HDG *bifariam secat rectas* PQ *&c. parallelas eidem rectæ* HG, *dicitur* diameter *hujus sectionis.*

II. *Terminus* D *diametri, vocatur* vertex *sectionis.*

III. *Rectæ* PQ, HG, *bifariam sectæ a diametro* DE,

DE, *vel earum semisses* HE, PO, *vocantur* ordinatæ *diametro*, *vel* ordinatim applicatæ *eidem diametro*.

IV. *Quòd si diameter* DE *secet ordinatas nedum bifariam*, *verum etiam perpendiculariter*, *appellabitur* axis.

V. *Abscissa*, *seu sagitta* DO *est segmentum diametri ab ordinata*, *&* *vertice interceptum*.

VI. *Sectio*, *cujus diameter parallela est lateri trianguli per axem*, *dicitur* Parabola.

Nimirum, ponatur sectio facta, servatis conditionibus consuetis, nempe, ut conus secetur triangulo per axem, & rursum secetur alio plano HDG; hac tamen lege, ut hujus curvæ diameter DE sit parallela lateri BC trianguli per axem; sectio HDG dicitur a Geometris Parabola.

Primaria proprietas Parabolæ in Cono consideratæ.

PROPOSITIO V.

22. IN *parabola quadrata ordinatarum* HE, PO *sunt interceptis diametris*, *seu abscissis* DE, DO *proportionalia*.

Si conus ABC sectus plano per axem, secetur & altero plano HDG, quod transeat per rectam HG perpendicularem basis circularis diametro AC, a qua secetur bifariam in E; & rursum idem planum HDG transeat per rectam DE parallelam uni laterum BC trianguli per axem; hæc sectio HDG per definitionem erit parabola. Dico jam, quadrata ordinatarum in hac sectione esse interceptis diametris proportionalia.

Demonstratio. Per quodvis punctum O communis sectionis DE, cui ordinatim applicata est POQ, ducatur recta ROS parallela baseos diametro AC.

Si per easdem rectas POQ, ROS ducatur planum RPSQ, hoc erit parallelum basi, quæ transit per rectas HG, AC parallelas duabus reliquis; ac proinde (*n.* 12.) sectio RPSQ erit circulus. Ergo quadratum PO æquabitur rectangulo ROS; hoc est, $\overline{PO}^2 = RO \times OS$; uti etiam $\overline{HE}^2 = AE \times EC$; Ergo $\overline{HE}^2 : \overline{PO}^2 :: AE \times EC : RO \times OS$. Atqui per constructionem, in parallelogrammo EOSC, OS $= EC$; Quare $\overline{HE}^2 : \overline{PO}^2 :: AE : RO$. Sed $AE : RO :: DE : DO$, propter similia triangula DAE, DRO; Ergo quadrata ordinatarum HE, PO sunt proportionalia partibus DE, DO axis, abscissis a vertice D. Quod erat &c.

Monitum.

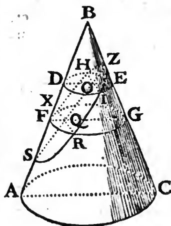
23. *INterrogabit fortasse quispiam, quid causæ sit, cur in sectione conica parabolæ illud postuletur in constructione, ut recta* HG *communis circulo baseos, & plano sectionis, sit quoque perpendicularis circuli diametro* AC, *in triangulo per axem existenti? Annon enim, si secundum planum secans, aliter inclinaretur ad triangulum per axem, annon, inquam, secaret superficiem coni? Omnino. An vero ea sectio non esset illa, quam definivimus nomine parabolæ? Esset quidem, dummodo bujus diameter* DE *pa-*

rallela sit lateri BC *trianguli per axem; quod unice in definitione hujus sectionis assumitur n.* 21. *Cur igitur illa sola inclinatio secundi plani secantis ad triangulum per axem admittitur, quæ rectam* HG *rectæ* AC *perpendicularem efficiat? Respondet Wallisius prop.* 7. *de Coni Sect. Quod alia quævis inclinatio non minus quidem sufficeret ad conicam sectionem efficiendam, qualis definitur; sed minus apta esset ad demonstrationes instituendas, quæ plerumque supponunt rectam* HG, *eique parallelas a diametro* DE *secari bifariam; quod non fieret, nisi recta* HG *perpendicularis esset circuli diametro* AC.

Hinc, cum planum coni sectionem efficiens ad varia triangula per axem, variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulis seligunt conicorum Scriptores, ad cujus basim recta HG *sit perpendicularis. Unicum autem est illud triangulum per axem, quod hanc affectionem patiatur respectu plani secantis, quomodocunque conus a plano secetur.*

DEFINITIO.

24. SECTIO SFZR, *cujus diameter* SZ *cum utroque latere trianguli per axem conveniat, & neque basi coni parallela sit, neque subcontrarie posita, ac proinde circulus non sit, vocabitur* Ellipsis.



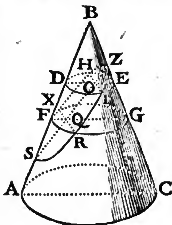
Si per duo puncta O & Q diametri SZ ducatur planum basi coni parallelum, efficiet duos circulos DIEH, FRGX (*n.* 12.).

Si planum secans ponatur perpendiculare triangulo ABC, uti nuper monuimus

nuimus fieri oportere in parabola, linea HI, communis nempe sectio circuli DIEH, & plani secantis, linea, inquam, HI perpendicularis erit eidem triangulo ABC, uti pariter linea XR, communis sectio circuli FRGX, & plani secantis.

Corollarium.

HInc linea HI perpendicularis erit duabus lineis DE, SZ, quæ ambæ sunt in plano trianguli per axem. Similiter linea XR erit quoque perpendicularis duabus lineis FG, SZ, quæ sunt pariter in eodem plano. Atqui linea HI est bifariam secta a diametro DE, & XR pariter bifariam secta a diametro FG; Quare SZ erit *axis* ellipsis, & OI, QR dicentur *ordinatæ* huic axi.



Cum autem ellipsis in orbem redeat, occurret ei diameter in duobus punctis, atque adeo duo erunt *vertices* ipsius, nimirum, S & Z.

Primaria proprietas Ellipseos in Cono consideratæ.

PROPOSITIO VI.

25. I*N ellipsi quadrata ordinatarum* OI, QR *sunt inter se, uti rectangula* ZO×OS, ZQ×QS, *quæ sub correspondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice sumptis, continentur.*

De-

Demonstratio. Triangula similia ZOE, ZQG exhibent $ZO:OE::ZQ:QG$.
Similiter triangula SQF, SOD dant
$SO:OD::SQ:QF$;
Ergo terminis utriusque proportionis invicem multiplicatis, erit $ZO\times OS:OE\times OD::ZQ\times SQ:QG\times QF$.
Atqui in circulo DIEH est $OE\times OD=\overline{OI}^2$;
& in circulo FRGX est $QG\times QF=\overline{QR}^2$;
Ergo $ZO\times OS:\overline{OI}^2::ZQ\times QS:\overline{QR}^2$;
& permutando, quadrata ordinatarum OI, QR sunt inter se, uti rectangula partium axis, quem secant. Quod erat &c.

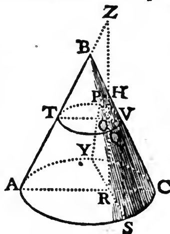
DEFINITIO.

26. *Sectio* SQHPY, *cujus diameter* HR *ita concurrat cum latere* RC *trianguli per axem in puncto* H *infra verticem* B *coni, ut producta conveniat in puncto* Z *alterius lateris* AB *supra eumdem verticem* B, *hæc sectio dicitur* Hyperbola.

Nimirum, iisdem positis, ut ante, communis sectio trianguli per axem, & alterius plani secantis, hoc est, diameter HR, non utique parallela sit lateri AC, sed ita concipiatur inclinata, ut concurrat in puncto Z alterius lateris AB supra verticem coni.

Si per punctum O diametri HR ducatur planum basi coni parallelum, efficiet circulum TPVQ.

Si planum secans ponatur perpendiculare triangulo per axem, recta YS, communis sectio plani secantis, & basis coni, perpendicularis erit diametro AC, quæ eamdem YS secabit bifariam in R. Similiter recta PQ secabitur bifariam a diametro TV, cui est perpendicularis.



Itaque linea RH vocabitur *axis* hujus sectionis; & lineæ RS, OQ erunt *ordinatæ* huic axi; & axis partes HR, HO vocantur *abscissæ* ab iisdem ordinatis.

Primaria proprietas Hyperbolæ in Cono considerata.

PROPOSITIO VII.

27. IN hyperbola quadrata ordinatarum RS, OQ sunt inter se, uti rectangula HR × ZR, HO × ZO, nimirum, sub earum abscissis HR, HO respective, & iisdem abscissis, auctis productione HZ.

Demonst. Triangula similia ZOT, ZRA exhibent

AR : TO :: ZR : ZO.

Triangula similia HOV, HRC dant pariter

RC : OV :: HR : HO.

Ergo multiplicatis terminis primæ proportionis per terminos secundæ, prodit

AR × RC : TO × OV :: ZR × HR : ZO × HO.

Cum

Cum autem in circulo ASCY habeatur $AR \times RC = \overline{RS}^2$; & in circulo TQVP sit $TO \times OV = \overline{OQ}^2$; his substitutis, prodibit analogia

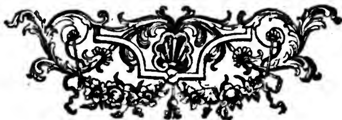
$$\overline{RS}^2 : \overline{OQ}^2 :: ZR \times HR : ZO \times HO;$$

hoc est, quadrata ordinatarum RS, OQ sunt inter se, uti &c. Quod erat &c.

Scholion.

JUvabit adnotare, in præcedenti demonstratione lineam HR *vocari* axem *hyperbolæ juxta generalem definitionem n.* 21., *quæ convenit omnibus hisce curvis. Quod abunde erat in hisce Prolegomenis, ut indicarem Tironibus, qua methodo veteres Geometræ hasce curvas in ipso cono scrutati fuerint. Verum enim vero, speciatim respectu hyperbolæ, linea* ZH *vocatur* axis primus, *seu* axis transversus, *ut distinguatur a secundo axe, de quo deinceps. Lineam autem* HR *abscissarum, vocant productionem axis; quemadmodum integram lineam* ZR *vocant* axem productum.

Sub hisce vocibus præcedens Theorema sic enunciabitur. Quadrata ordinatarum ad axem productum, sunt inter se, uti rectangula abscissarum in axem productum usque ad earumdem extremitatem.



SECTIONUM
CONICARUM
PARS I.
DE PARABOLA.



SECTIONUM CONICARUM

PARS I.

De Parabola absolute considerata.



Actenus curvas, quas vocant sectiones conicas, nimirum, *Parabolam*, *Ellipsim*, & *Hyperbolam*, in ipso cono consideravimus; quippe quæ a coni sectione & nomen, & originem traxisse reputantur; ac primaria illarum symptomata ex cono secto deduximus: quod & de reliquis earum affectionibus simili methodo, operosius quidem, quam necesse erat, præstiterunt veteres Geometræ, ac plerique etiam ex recentioribus.

Verum enim vero harum curvarum natura magis absoluta est, & universalior, quàm ut ad conum

dumtaxat pertinere videatur. Non enim, inquit Wallisius part. 2. de Sect. Conic., *Parabola magis postulat, ut fiat sectione coni, plano lateri parallelo; quam circulus, ut fiat sectione coni, plano basi parallelo; aut triangulum, ut fiat sectione coni per verticem;* neque hoc sibi volunt conicorum Scriptores, qui alios agnoscunt, & docent parabolam in plano describendi modos.

Harum itaque curvarum originem in cono aliter atque aliter secto non alia de causa persecutus sum, quam ut fontes aperirem, unde Veteres doctrinam suam hausisse putarentur; & quibus tandem gradibus ad conicorum scientiam pervenerint.

Quamobrem, seposito cono, nulloque respectu ad hanc genesim habito, harum figurarum affectiones ex absoluta earum natura, per ipsam definitionem nominis, satis explicata, multo clarius, ac facilius proferam cum Recentioribus Wallisio, Hospitalio, aliisque; quibus non ita porro adstringi volo, ut illustrandæ adhuc conicorum doctrinæ quam aptissimam judicavero methodum, non illam sequar.

Quam itaque ex coni sectione demonstravimus primariam parabolæ proprietatem, ex qua reliqua omnia fluunt, liceat jam mihi definitione ipsa comprehendere, ac parabolam eo charactere ornatam, suo cono eximere, atque absolute quidem, & universaliter definire.

De Axe Parabolæ.

SYNOPSIS.

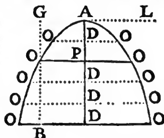
Seposito cono, parabolæ natura universalius in plano exponitur. Præcipua parabolæ proprietas respectu sui axis, definitione nominis assumitur; eamdemque curvam hoc charactere distinctam, licet jam suo cono exi-

eximere, & absolute quidem, & universaliter definire. Quid sit latus rectum, seu parameter *axis, & cui usui. Ordinatarum ad axem quadrata æqualia rectangulis sub suis sagittis, & constanti parametro. Parabolam describere per plura puncta. Curva parabolica per se figuram non comprehendit. Generalis expressio, & æquatio, quæ perfecte naturam parabolæ exprimit relate ad axem. Affectiones reliquæ. Per axis originem omnis parallela ordinatis, est tangens; & reciproce, omnis parallela tangenti per axis originem, est ordinata ad axem. Quid sint* diameter, tangens, subtangens, normalis, subnormalis *curvæ parabolicæ. Tangentis proprietas respectu axis. Tangentem ducere.*

DEFINITIO.

28. P*Arabolam igitur voco eam, sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam, ejusmodi curva terminatam, puta,* OAO, *cujus ordinatarum ad diametrum quadrata sint interceptis axis partibus proportionalia.*

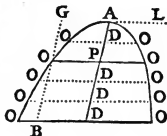
Porro ordinatas, seu ordinatim applicatas appello DO, PO, semisses parallelarum rectarum OO, OO, parabola utrinque terminatarum, quas bifariam secat una linea recta, puta, ADP, quam appello *Diametrum*. Sin autem easdem parallelas diameter secet nedum bifariam, verum etiam perpendiculariter, voco *Axem*, seu diametrum principalem; a qua ordiri placet parabolæ affectiones.



29. Punctum autem illud bisectionis D, vel P, punctum *applicationis* appellant,

lant, in quo videlicet applicatur suæ diametro illa, quam ordinatam diximus.

Diametri vero segmentum, puncto applicationis, & curvà parabolicà comprehensum, AD, AP, *Diametrum interceptam*, alii *Sagittam* vocant.



Punctum diametri in curva illa existens, puta, A, appello *Verticem*, tam diametri, quam ipsius parabolæ, secundum illam diametrum consideratæ.

Monitum I.

30. M*Oneo itaque, definitionem parabolæ hoc loco ad axem dumtaxat, seu diametrum, ut vocant, principalem a nobis restringi; quemadmodum in Prolegomenis axem dumtaxat respeximus, quocum ordinatæ angulos rectos efficiant. Quod aliter fieri potuisse intelligo. Nam eadem definitio, uti & superior demonstratio, & proprietas parabolæ ex cono deducta, extendi perinde potuisset ad quamlibet diametrum, quacum ordinatæ angulos quosvis efficiant. Sed propositum mibi est Tironum phantasiæ consulere, quam nolui in ipso limine distractam rerum varietate; atque ita ex simplicissima parabolæ proprietate, relate* ad axem, *tanquam Ariadnæ filo, ad reliquas inde aptas, & connexas affectiones sensim deducimus.*

Monitum II.

31. M*Onitos præterea Tirones velim,* Parabolæ, Ellipsis, & Hyperbolæ *appellationibus apud Geometras, nonnunquam curvas lineas, nonnunquam vero figuras planas, ejusmodi curvis terminatas, intelligi.*

ligi. Utrumque in definitione complector; ac si quando de ambiguitate significationis metuatur, non incommodum erit, lineæ, *vel* plani *vocem adjungere, ut* linea parabolica, planum parabolicum &c.

32. L*Atus rectum*, seu *Parameter* est linea AL in extremitate diametri ducta, qua utimur, tanquam mensurà, ad dimetienda quadrata ordinatarum.

Porro illud præ reliquis peculiare in parabola sibi vindicat parameter AL, quòd rectangulum latere recto AL, & parte diametri, puta, AP, ab ejusdem vertice A, & puncto applicationis P interceptà contentum, æquale semper sit quadrato ordinatæ PO; ut infra demonstrabitur. Itaque parameter AL concipi debet, tanquam communis altitudo rectangulorum LAD, LAP, quorum singula sint respective æqualia quadratis ordinatarum DO, PO.

Monitum.

33. M*Oneo tamen, non idem latus rectum omnibus ejusdem parabolæ diametris convenire. Nam, quemadmodum parabola quælibet infinitas numero diametros habet, ut post dicetur; ita diameter quævis suas habet ordinatim applicatas, suumque latus rectum seu parametrum. Hæc quidem linea* AL *imaginaria, certæ longitudinis esse debet, & ubivis notari, ac describi potest; quin imo sola imaginatione etiam suppleri. Mos tamen invaluit, ut ducatur a diametri vertice ordinatim applicatis parallela. Quæ autem de parabolæ latere recto dicta sunt, ea fere lateribus rectis ellipseos, & hyperbolæ infra erunt accommodanda.*

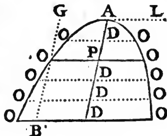
Scho-

Scholion.

34. *AB hisce definitionibus fas mihi erat totius hujusce tractationis initium ponere, omissis coni sectionibus, & harum curvarum proprietates hinc, quasi a vero fonte, deducere demonstrando; uti mox præstabo. Sed operæ pretium me facturum existimavi, si Tironibus modico flexu monstrarem salebrosum, & arduum Geometrarum veterum iter ad conicorum scientiam, & eosdem faciliori tramite cum recentioribus ad eum, quem destinaveram, scopum perducerem. Hac de causa novas terminorum aliquot definitiones necesse erit deinceps aliquoties adjungere, omissa coni mentione; ne opus sit, vel ad præcedentia recurrere, vel coni auxilium in definitionibus postulare.*

PROPOSITIO I.

35. *IN parabola si recta* AL *sit tertia proportionalis cuicunque sagittæ* AP, *& ordinatæ* PO *ad axem, etiam reliquæ omnes ordinatæ* DO, DO *erunt mediæ proportionales inter suas sagittas* AD, AD, *& eamdem constantem rectam* AL; *hoc est, ordinatarum quadrata æqualia erunt rectangulis comprehensis sub sagittis* AD, AD, *& constanti linea* AL; *quæ proinde erit parameter axis, seu latus rectum parabolæ.*



Demonstratio. Quoniam facta est PO media proportionalis inter AP & AL, erit quadratum ex PO æquale rectangulo comprehenso sub AP & AL. Sed

ex

ex definitione parabolæ $\overline{PO}^2 : \overline{DO}^2 :: AP : AD :: AP \times AL : AD \times AL$, propter communem altitudinem AL; Quare $\overline{PO}^2 : \overline{DO}^2 :: AP \times AL : AD \times AL$. Sed per conſtr. $\overline{PO}^2 = AP \times AL$; Ergo $\overline{DO}^2 = AD \times AL$. Quod de reliquis ordinatis ſimiliter demonſtratur.

Corollarium I.

36. *Cum in omni parabola axis interceptus, ordinata, & parameter ſint continue proportionalia, datis eorum duobus quibuſvis, etiam reliquum magnitudine datur;* uti conſtat ex regulis proportionum.

Atque hinc, dato axe AD, & data quavis conſtanti linea AL, quæ parametri vicem obeat, habes methodum expeditam *deſcribendi parabolam per plura puncta*. Nam, ſi inter conſtantem lineam AL, & abſciſſas ſingulas quærantur totidem mediæ proportionales DO, PO &c., quæ angulos rectos cum axe dato AD efficiant, puncta omnia O, O &c. erunt ad parabolam.

Corollarium II.

37. Patet etiam, *ordinatim applicatas, prout longius a vertice applicantur, ſemper augeri;* cum ipſarum quadrata ſint interceptis ſagittis, hoc eſt, diſtantiis punctorum applicationis a vertice, proportionalia. Et propterea parabolam, ejuſmodi curvam eſſe, quæ per ſe figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec ſint unquam, extra punctum verticis, coitura.

Co-

Corollarium III.

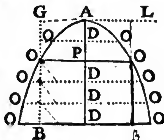
38. *Omnis linea* GOB *parallela axi* AD, *in uno tantum puncto parabolam secat.* Quia ordinatæ supra OP, sunt minores ordinatà OP; & reliquæ ordinatæ infra OP, sunt majores eàdem ordinatà OP.

Corollarium IV.

39. Itaque, ut parabolæ natura, saltem respectu axis, designetur generali expressione, quam mox traducam ad reliquas diametros; vocetur p parameter axis AD; quælibet abscissa AD, x; quælibet ordinata, suæ abscissæ respondens, y. Quamobrem ex Theor. constanter habebitur $yy = px$; nimirum, quadratum cujuslibet ordinatæ y æquale rectangulo sub sua sagitta x, & constanti linea p, quæ dicitur parameter. Cum autem hæc proprietas conveniat omnibus parabolæ punctis, eorumque positionem determinet respectu sui axis AD, *hinc litteralis expressio, & æquatio $yy = px$, perfecte exprimit naturam parabolæ.*

Corollarium V.

40. Si a quovis puncto D axis AD, ducatur recta ODO reliquis ordinatis parallela, hæc occurret parabolæ in duobus punctis O & O, utrinque æque dissitis ab eodem axis puncto D. Nam quadratum cujuslibet ordinatæ DO, DO, hinc atque inde a puncto D acceptæ, æquatur eidem rectangulo px.



Co-

Corollarium VI.

41. AB eadem generali proprietate parabolæ respectu sui axis, $yy = px$, illud etiam consequitur, quòd, quò major est abscissa AD, x, eò major evadit ordinata DO, y, & quidem in infinitum. Et contra, quò magis abscissa imminuitur, eò magis ejus ordinata decrescit; ita ut evanescente abscissa AD, quælibet ordinata DO utrinque ab axe pariter evanescat; hoc est, duo puncta occursus O & O coeant in idem punctum A. Atque hinc,

I. *Si per axis originem* A *ducatur recta* AL *ordinatis parallela, hæc erit tangens in puncto* A.

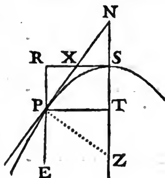
II. *Et vicissim, omnis parallela tangenti ductæ ab axis vertice, & a parabolæ perimetro terminata, est ordinata ad axem.*

Corollarium VII.

42. OMnes perpendiculares ad axem, utrinque terminatæ a parabola, bifariam secantur; ac proinde axis dividit parabolam in duas partes perfecte æquales, & similiter positas utrinque.

DEFINITIO.

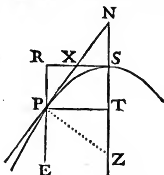
43. SI ex quovis puncto P sumpto in perimetro parabolæ, ducatur PE parallela axi ST, hanc voco *Diametrum* ejusdem parabolæ.



44. Similiter, si a puncto sumpto ubivis in perimetro curvæ, ducatur tangens PN, producaturque axis TS, donec occurrat eidem tangenti in puncto N, ac præterea a puncto

con-

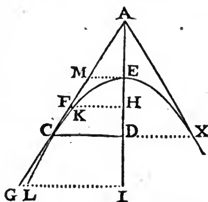
contactus ducatur PT ordinata ad axem; Portio axis TN, intercepta ab ordinata PT, & a puncto N, dicitur *Subtangens*; Recta PZ perpendicularis tangenti in puncto contactus, & ab axe terminata, dicitur *Perpendicularis*, *seu Normalis* curvæ; Recta TZ intercepta a perpendiculari tangentis, & ordinatà ad axem, quarum utraque ab eodem puncto contactus P ducitur, vocari solet *Subnormalis*.



PROPOSITIO II.

45. L*inea abscindens in axe producto segmentum sagittæ æquale, tangit parabolam.*

Sumpto ubivis in parabolæ axe puncto D, cui ordinatim applicetur DC, axis DE extra parabolam producatur, ut fiat EA=ED; ducaturque CA. Dico lineam AC tangere parabolam in puncto C; ita ut ejusdem lineæ AC quodcunque aliud punctum F, aut G, sit extra parabolam.



Demonstratio. Ex punctis F & G intelligantur ductæ lineæ FH,

FH, GI parallelæ eidem CD, ordinatim applicatæ ex puncto C; Ostendam, eas esse majores ordinatim applicatis HK, IL. Nam quadratum CD ad quadratum FH se habet, ut quadratum DA ad quadratum HA, seu, ut quadratum ED, quarta pars quadrati DA, ad quartam partem quadrati HA. Atqui rectangulum HE×EA minus est quarta parte quadrati HA (*per prop. 7. lib. 2. Euclid.*, *& in nostris Elem. per n.* 509.); Ergo major est ratio quadrati ED ad rectangulum HE×EA, seu lineæ DE ad HE, propter communem altitudinem EA, quàm sit ratio quadrati CD ad quadratum FH. Jam vero, ut DE ad HE, ita ex definitione parabolæ, quadratum CD ad quadratum ordinatim applicatæ KH; Ergo quadratum CD ad quadratum KH majorem rationem habet, quàm ad quadratum FH; Ergo linea FH major est, quàm KH; & proinde punctum F lineæ CA est extra parabolam.

Idem ostendam de puncto G, & de reliquis punctis, excepto puncto C; Ergo linea ACG est tangens. Quod erat &c.

Corollaria.

46. I. SI per E verticem axis, ducatur tangens ME, hæc erit dimidia ordinatæ CD.

II. Tangens AC dividitur bifariam in M.

PROPOSITIO III.

47. *ET reciproce, tangens parabolam abscindit in axe producto segmentum subtangentis, æquale sagittæ.*

Demonstratio. Recta AC tangat parabolam in puncto C; & ordinatim applicetur CD: Dico, DE,

EA æquales esse. Si negas, æquales sint HE, EA; & ordinatim applicetur KH; tum concipiatur ducta KA, quæ tangens esset per præced., & producta lineam AF secaret. Ergo duæ rectæ lineæ spatium clauderent.

Idem absurdum sequitur, si AE, EI dicantur æquales. Nam, si concipiatur ducta AL, hæc esset tangens per præced.; cum autem AC, per hyp., sit tangens, producta secaret tangentem AL.

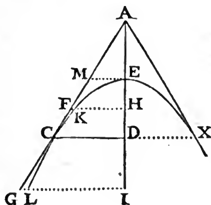
Corollaria.

SEquitur I., ab eodem puncto A, atque ad easdem partes, rectam aliam, quæ parabolam contingat, duci non posse.

II. Parabolam in eodem puncto C, non nisi unicam rectam contingere posse.

III. Inter curvam, rectamque contingentem AC, rectam aliam cadere non posse, quin curvam secet.

IV. Habes hinc methodum ducendi tangentem a quovis dato puncto C. Si enim ducatur ordinata CD ad axem, ac fiat DE=EA, recta CA erit tangens.



De

De Diametris.

SYNOPSIS.

Diametrorum cum axe proprietates communes sanciuntur. Quadrata ordinatarum diametro sunt inter se, uti abscissæ. Recta quælibet axi parallela, quam vocamus diametrum, easdem habet proprietates, quas convenire axi demonstravimus. Hinc, quæ respectu axis demonstrata sunt Theoremata de parametro, tangentibus, ordinatis ad axem, eadem traducuntur ad quamlibet diametrum. Parabolæ diametri omnes inter se paralleli, & infiniti. Problemata aliquot axi, & diametris communia.

48. IN sectione coni, ex quo primò eduximus parabolam, more Veterum, demonstravimus, saltem respectu *axis*, hanc esse parabolæ proprietatem, *ut quadrata ordinatarum ad axem, habeant eamdem proportionem inter se, quam habent abscissæ;* Quod idipsum n. 28., tanquam definitionem nominis, postea assumpsimus, etiam omisso cono.

Reliquum jam est, ut etiam independenter a cono, demonstrare aggrediar, hanc proprietatem convenire cuilibet parabolæ, respectu *cujuslibet diametri*, quæ cum suis ordinatis angulos quosvis efficiat.

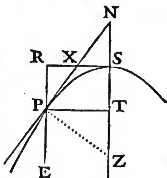
Quamobrem, quemadmodum de axe, ita & de diametro duo erunt demonstranda.

I. Quod bifariam secet rectas omnes tangenti parallelas, & utrinque ad parabolam terminatas.

II. Quod quadrata ex semissibus istarum rectarum sint, ut diametri abscissæ correspondentes.

PROPOSITIO IV.

49. *SI a quolibet puncto* P *ducatur* PE *parallela axi, idest diameter* (n. 43.), *quæ producta occurrat in* R *tangenti* SX, *ductæ a vertice* S *ejusdem axis; & rursum ab eodem puncto* P *ducatur tangens* PN, *quæ occurrat in* N *axi producto; Dico, triangulum* NXS, *a duabus tangentibus, & axe comprehensum, æquari triangulo* PXR *facto ab iisdem tangentibus, & diametro.*



Demonstratio. A puncto P ducatur ordinata PT ad axem; NS=ST=PR (*n.* 47.). Triangula NXS, PXR sunt æquiangula; ac præterea latus NS=lateri PR; Ergo sunt perfecte æqualia. Quod erat &c.

Corollarium.

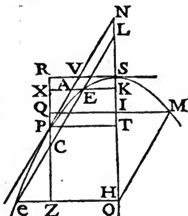
50. ITaque *rectangulum* PRST *æquatur triangulo* PTN. Nam, si triangulis æqualibus PRX, NSX addatur utrinque PXST, fiet PRST=PTN.

PROPOSITIO V.

51. *DAto axe* NH, *& diametro* RZ, *datisque eorum tangentibus* PN, SR, *si a quovis puncto* E, *aut* e, *aut* M, *sumpto in perimetro parabolæ, ducatur utrique tangenti parallela; Dico, triangulum* EKL, *vel* eOL, *vel* IMH, *factum ab hisce duabus parallelis, & axe, æquari rectangulo* XRSK, *vel*

vel ZRSO, *vel* QRSI, *facto a tangente axis, ejusque parallelà, & intercepto ab axe, & diametro; nimirum*, EKL=XRSK &c.

Demonstratio. A puncto contactus P ducatur ordinata PT ad axem. Triangula similia PTN, EKL sunt inter se, uti quadrata suarum basium PT, EK. Quia vero PT, EK sunt ordinatæ ad axem, earum quadrata sunt inter se, uti abscissæ ST, SK, vel, uti rectangula SRPT, SRXK, quæ habent altitudinem communem SR; Ergo triangula PTN, EKL sunt inter se, uti rectangula SRPT, SRXK. Atqui.(*n.* 50.) PTN= SRPT; Ergo EKL= SRXK.



Eodem modo demonstrabitur, triangula PTN, *e*OL, cum sint similia, esse inter se, uti rectangula SRPT, SRZO; & consequenter *e*OL=SRZO.

Pariter, propter similitudinem triangulorum PTL, IMH, demonstrabitur, triangulum IMH æquari rectangulo RSQI. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

52. I*Isdem stantibus, Dico, triangulum alterum* XEC, *factum a duabus tangenti cuilibet parallelis, & diametro* RZ, *æquari parallelogrammo* PCLN, *comprehenso ab una parallelarum, a diametro, ab axe, & a diametri tangente.*

Demonstratio. Triangulum PTN = rectangulo

SRPT (*n.* 50.). Subducatur utrinque trapezoides communis KAPT: triangulum reliquum ANK æquabitur triangulo RPV + trapezoide VAKS. Auferatur rursum, hinc triangulum EKL, inde rectangulum huic æquale SRXK: trapezoides ANLE æquabitur triangulo XAP. Addatur utrinque trapezoides AECP: fiet parallelogrammum NLCP = triangulo XEC.

Eodem modo, si punctum *e* sit infra punctum P, triangulum *e*LO = rectangulo SRZO (*n.* 50.). Si hinc subducatur triangulum LEK, & inde huic æquale rectangulum SRXK, habebitur trapezoides KE*e*O = rectangulo KXZO; & utrinque subductâ figurâ KECZO communi, erit triangulum *e*CZ = triangulo XEC, & consequenter = parallelogrammo NLCP.

N L R V S A X K E Q I M P T C H e Z O

Denique, si punctum E, ut in Fig. sequenti, sit in altera parte parabolæ, puta, in M; triangulum IMH æquatur rectangulo SRQI; quare, si a triangulo QMT subducatur triangulum IMH, eidemque addatur rectangulum SRQI, fiet trapezoides SRTH = triangulo QMT. Et rursum, si ab hujusmodi trapezoide subducatur triangulum RVP, & eidem adjiciatur triangulum NVS = RVP, fiet parallelogrammum TPNH = triangulo QMT. Quod erat &c.

PRO-

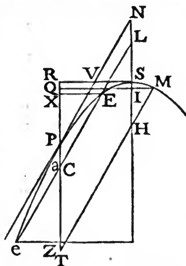
PROPOSITIO VII.

53. *SI a puncto* E *parabolæ ducatur recta* Ee, *tangenti* PN *parallela;*

Dico I. rectam Ee *occurrere parabolæ in alio puncto* e;

Dico II. eamdem bifariam dividi a recta PZ, *quæ a puncto contactus ducatur axi parallela.*

Demonstratur I. pars. In perimetro parabolæ accipiatur quodvis aliud punctum *a* infra P. Tangens, quæ ab hoc puncto duceretur, necessario occurreret tangenti PN; nam, si non occurreret tangenti, esset illi parallela, ac proinde secaret parabolam, non præcise tangeret in puncto *a*. Quamobrem hæc tangens a puncto *a* secabit quoque lineam E*e*, quæ est parallela ipsi PN; & ex natura tangentis secabit rectam E*e* extra parabolam, & versus plagam puncti *e*; quandoquidem eadem tangens secabit tangentem alteram PN versus partem puncti P; ac proinde perpetuo diverget a parallela versus E. Ergo E*e* secat parabolam in duobus punctis. Quod erat primum.



Demonst. II. pars. Linea E*e* secatur bifariam a recta PC. Nam triangula XEC, Z*e*C sunt inter se æqualia (*n.* 52.); & cum sint etiam æquiangula, latus EC = lateri C*e*. Quod erat alterum.

PROPOSITIO VIII.

54. I*Isdem stantibus, quadrata ordinatarum* CE, TM *&c. diametro* PT, *sunt inter se, uti abscissæ* PC, PT.

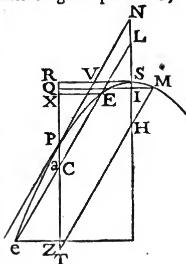
Demonstratio. Hæc quadrata sunt inter se, uti triangula similia CXE, TQM; nam CE, TM sunt latera homologa eorumdem triangulorum. Atqui CXE = parallelogrammo PCNL; & TQM = parallelogrammo TPNH; Ergo $\overline{CE}^2 : \overline{TM}^2$ :: PCNL:TPNH::PC:PT; hoc est, parallelogramma se habent, ut bases, cum sint intra easdem parallelas. Quod erat &c.

Corollaria.

55. HInc recta quælibet axi parallela, quam vocavimus diametrum, easdem sibi vindicat affectiones, quas in definitione axis assumpsimus; nimirum,

I. Bisecat rectas omnes tangenti parallelas, & utrinque ad parabolam terminatas;

II. Quadrata ex semissibus istarum rectarum sunt, ut ipsius abscissæ.



Quare, si a puncto quovis P in parabolæ curva ducatur recta PT parallela axi SH, erit PT sic ducta, ejusdem parabolæ diameter, verticem habens in P, & ordinatim applicatas CE, TM parallelas tangenti PN ductæ a vertice ejusdem diametri. Itaque

I. Se-

I. Sequitur, per omne punctum, etiam intra parabolam assumptum, duci posse diametrum; quia duci potest parallela axi.

II. Quodlibet curvæ parabolicæ punctum, alicujus diametri verticem esse; ac proinde in qualibet parabola infinitos esse vertices, atque diametros infinitas numero.

III. Parabolæ diametros omnes esse invicem parallelas.

IV. Quamlibet rectam, in eodem plano, cuilibet diametro parabolæ parallelam, ejusdem parabolæ diametrum etiam esse, eique in uno aliquo, & quidem unico puncto occurrere.

V. Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra parabolam punctum transeuntem, & diametro non parallelam, in binis punctis parabolæ occurrere, & alicui diametro esse ordinatim applicatam.

VI. Quæ vel alicui diametro parabolæ ordinatim applicata est, vel diametrum quocunque modo secat, vel quæ parabolam secat, aut ipsi occurrit in duobus punctis; hæc nec illius parabolæ diameter esse potest, nec parallela ulli ipsius diametro.

Ex hisce Corollariis non erit Tironi difficile, plerasque, ut vocant, effectiones geometricas colligere, & Problemata resolvere.

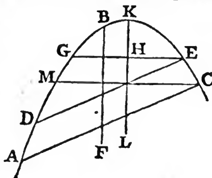
Probl. I. *Datæ parabolæ diametrum invenire*. Nam recta duas parallelas inscriptas bisecans, est diameter. (*n.* 55.).

Probl. II. *Datæ in parabola lineæ inscriptæ diametrum exhibere*. Ducatur illi parallela; & utraque bifariam secetur.

Probl. III. *Per datum quodvis in eodem plano punctum rectam ducere, quæ sit parabolæ datæ diameter*. Inventa enim, ut prius, una qualibet diametro,

metro, recta huic parallela, per datum punctum ducta, diameter erit quæsita.

Probl. IV. *Datæ parabolæ* ABC *axem exhibere*. Ponantur duæ quævis parallelæ DE, AC, quarum exhibeatur diameter BF; ad quam ex E & C normaliter ducantur EG, CM; alteràque illarum, puta, EG, bifariam divisà in H, per H ducatur parallela diametro BF; Dico, hanc parallelam esse axem. Nam, si diametro æquidistat, erit hæc quoque diameter curvæ; & quia parallelarum EG, CM unam ad angulos rectos bisecat, bisecabit & alteram perpendiculariter; Itaque KL erit axis.



Corollaria.

56. *OMnia, quæ ex ordinatarum proprietate respectu axis, deduximus Theoremata, & Corollaria, traduci eadem possunt ad quamlibet diametrum*. Nam, quæ demonstravimus n. 35. 36. 37. 38. 39. 40. &c., ab hac ipsa ordinatarum, respectu axis, proprietate deducta sunt, & æque subsistunt, sive anguli ad diametrum sint recti, sive acuti, vel obtusi. Quare, si in præcedentibus Theorematis axi substituamus diametrum quamlibet, eædem demonstrationes locum habebunt. Itaque

I. *In omni parabola, tertia proportionalis sagittæ, & ordinatæ ad quamlibet diametrum, est parameter illius diametri; & rectangula sub hac parametro, & singulis sagittis comprehensa, æqualia sunt quadratis ordi-*

ordinatarum. Demonstratio plane eadem, sive referatur ad axem, sive ad diametrum.

II. Si cujusvis diametri parameter vocetur p, abscissa x, & huic respondens ordinata y; æquatio $yy = px$ perfecte exprimit naturam parabolæ, etiam respectu suæ diametri.

III. *Omnis recta per diametri originem ducta, & hujus ordinatis parallela, est tangens parabolæ; neque ab eodem puncto tangens alia duci potest.* Nam, quæ deduximus n. 45. 46. respectu axis, æque subsistunt, si diametro cuivis applicentur. *Et vicissim, quæ tangenti æquidistat, ordinata est ad diametrum ex contactu demissam.*

IV. *Linea abscindens in diametro producta segmentum sagittæ æquale, tangit parabolam. Et vicissim.* Nam, si axi substituatur quælibet diameter, demonstratio perinde subsistit; atque adeo eadem Corollaria locum habent.

V. Hinc omnes illæ æqualitates triangulorum, & parallelogrammorum, quas n. 49. 50. 51. 52. prosecuti fuimus relate ad axem, facile traduci possunt ad quamlibet diametrum.

VI. *Linea per contactum ducta, bifariam dividens parallelam tangenti, diameter est.*

VII. *In parabola quævis linea duas parallelas bifariam dividens, diameter est.*

VIII. *Tangentes ductæ per extrema applicatæ, in eodem puncto illius diametrum secant.* Nam segmentum subtangentis æquatur sagittæ, sive producatur axis, sive diameter quæcunque.

PRO-

PROPOSITIO IX.

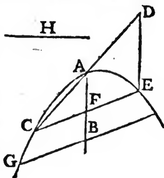
57. *A Dato puncto in parabolæ perimetro, vel in ipsa diametro, ad datam diametrum ponere ordinatim applicatam.*

Similiter datam lineam ad datam in parabola diametrum ordinatim ponere.

Resolutio. Sit in parabolæ perimetro CAE datum punctum C, & diameter data sit AB, ad quam ex C ordinatam oportet ponere lineam CFE. Ducatur recta CA, quæ ita producatur in D, ut CA, AD æquales sint; & ex D demissa DE parallela diametro AB, occurrat parabolæ in E; jungaturque CE. Patet CE in F divisam esse bifariam, cùm recta CD bisecta sit in A, & DE, AF sint parallelæ.

Si punctum datum fuisset in ipsa diametro, ut B; ex quovis perimetri puncto C ponatur ordinatim applicata CE, cui per quodvis punctum B diametri ducatur BG parallela.

Denique, si linea ordinatim applicanda debeat esse æqualis lineæ H; assumpto quovis puncto C in perimetro, ducatur ordinata CF; fiatque, ut quadratum CF ad quadratum H, ita AF ad AB; & per B ducatur BG parallela ordinatæ CF; Dico, BG esse ordinatim applicatam, & æqualem lineæ H. Cum ad ejus quadratum se habeat quadratum CF, ut AF ad AB.



Co-

Corollarium.

58. H*inc per datum in parabolæ perimetro punctum tangens ducitur.* Ex dato puncto demittatur diameter, ad quam, per præced., applicetur ordinata; huic parallela per datum punctum ducta, erit tangens quæsita (*n.* 56.).

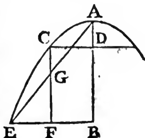
Vel, ducatur quæcunque diameter, ad quam ex dato puncto ponatur ordinatim applicata; ac fiat segmentum diametri productæ æquale sagittæ (*n.* 56.).

PROPOSITIO X.

59. O*Mnium ordinatim applicatarum ad duas diametros, quarum altera est axis, illa ordinata minor est, quæ ad axem applicatur; modò distantiæ a puncto verticis, hoc est, sagittæ æquales fuerint.*

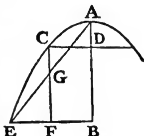
Parabolæ axis sit AB; & per punctum C transire debeat diameter. Ducatur ad axem ordinata CD; & fiat AB quadrupla ipsius AD; ducatur etiam perpendicularis BE, quæ dividatur bifariam in F; denique jungatur FC, ducaturque AE.

Demonstratio. Recta AB facta est quadrupla ipsius AD; Ergo per def. parab., quadratum EB quadruplum est quadrati CD; & proinde quadratum FB æquale est quadrato CD; Ergo FB, CD sunt æquales. Sed sunt etiam parallelæ; Ergo CF, AB sunt parallelæ; hinc CF est diameter (*n.* 55.). Cum autem EA sit bifariam divisa in G, propter analogiam EF:FB::EG:GA, erit EG ordinatim applicata, quæ major est, quam EF, seu FB, aut CD.



Osten-

Oſtendo autem CG, AD eſſe ſagittas æquales. Eſt enim AB quadrupla ipſius AD, & rurſum eadem AB dupla rectæ GF, propter analogiam EF:EB::FG:AB; quare reſtabunt AD, CG æquales. Quod erat &c.



Cum autem ſemper ſe habeant ſingula quadrata applicatarum ad eamdem diametrum, ſicut ſagittæ; hinc univerſaliter de omnibus applicatis conſtat veritas Propoſitionis.

PROPOSITIO XI.

60. *SI parabolam* ABC, ut in Fig. ſequenti, *ſecent duæ quævis parallelæ* AD, BC, *quarum diameter ponatur* EF; *Dico, junctas rectas* AB, DC *in eodem diametri puncto* G *convenire*.

Et reciproce, ſi BC, AD *ſint parallelæ, & rectæ* AB, DC *conveniant in puncto* G; *Dico, punctum* G *eſſe in diametro linearum* BC, AD.

Demonſt. I. pars. Quoniam EF diameter eſt rectarum BC, AD, bifariam erunt diviſæ in punctis E & F; unde AE:BF::AG:BG::EG:FG.

Atqui AE:BF::ED:FC;

Ergo ED:FC::EG:FG::DG:CG.

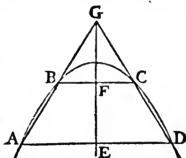
Itaque punctum G commune eſt tribus lineis AB, DC, EF. Quod erat primum. Idem quoque oſtenditur, ſi punctum G cadat intra parabolam.

Demonſtratur II. pars. Ponantur jam AD, BC parallelæ; & junctæ AB, CD conveniant in puncto quovis G; Dico, punctum G eſſe in diametro, ad quam ſint ordinatæ BC, AD.

Diviſà enim BC bifariam in F, demittatur ex

G per

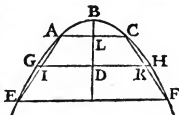
G per F recta GE. Quoniam igitur AD, BC sunt parallelæ, erit AE:ED :: BF:FC. Sed BC ponitur bifariam divisa in F; Ergo & AD in E quoque divisa est bifariam; Unde GE diameter est rectarum BC, AD. Quod erat alterum.



PROPOSITIO XII.

61. *In parabola* EBF *sint parallelæ quævis rectæ* AC, EF; *junctisque* AE, CF, *ducatur alia quævis* GH *parallela ipsi* AC, *occurrens rectis* AE, CF *in* I *&* K; *Dico, segmenta* GI, KH *esse inter se æqualia.*

Demonstratio. Ducatur LD diameter rectarum AC, GH. Quoniam HG æquidistat ipsi ordinatæ AC, erit HG bifariam divisa in D. Est autem ID = DK; quia ID : DK :: AL : LC; nam per præced., EA, FC in idem punctum diametri conveniunt; Ergo & reliquæ IG, HK quoque sunt æquales. Quod erat &c.



De Parametro, seu Latere recto Parabolæ.

SYNOPSIS.

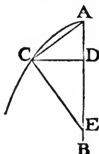
Latus rectum cujusvis datæ diametri invenire. Latus rectum axis omnium minimum. Sagitta interdum æqualis lateri recto, seu parametro diametri. Quadratum subtensæ æquale rectangulo ex axis abscissa in summam ejusdem abscissæ, & parametri axis. Parameter diametri cujuscunque superat parametrum axis quadrupla axis portione, interceptà ejusdem vertice, & ordinatim applicatà, ab assumptæ diametri vertice. Hinc rursum conficitur, parametrorum omnium minimam esse illam, quæ refertur ad axem; aliarum vero illa semper minor est, quæ refertur ad diametrum axi propinquiorem. Hinc æquidistantium diametrorum ab axe, parametri sunt æquales. Definitur excessus, quo parameter diametri ab axe remotioris, superat parametrum diametri, eidem axi vicinioris. Definitur differentia parametrorum, quæ ad duas quasvis diametros referuntur. Ex datis axe, vel diametro, ejusque parametro, invenire aliam diametrum, quæ habeat parametrum datam. Data parametro unius diametri, invenire parametrum cujusvis alterius diametri. Definitur proportio sinus anguli, quem diameter quævis constituit cum suis ordinatis, ad radium.

PROPOSITIO XIII.

62. *Latus rectum invenire, datæ in data parabola diametro conveniens.*

Resolutio. Sit quæcunque diameter A B, ad quam applicetur ordinata C D. Duabus rectis A D, C D quæratur tertia proportionalis; hæc satisfaciet quæsito.

to. Eſt enim latus rectum diametro interceptæ, & ordinatim applicatæ tertia continue proportionalis (*n.* 35. & *n.* 56.).



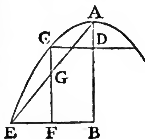
Aliter. Ducatur A C, ad quam ſit perpendicularis C E; Dico, D E eſſe latus rectum. Cum enim angulus A C E ſit rectus, erit C D media proportionalis inter A D & D E; Ergo &c.

PROPOSITIO XIV.

63. *Latus rectum axeos minimum eſt laterum rectorum, quæ ad reliquas diametros ſpectant.*

Parabolæ axis ſit A B, & quæcunque alia diameter C F; ſint præterea duæ ſagittæ æquales A D, C G; & ordinatim applicatæ E G, C D.

Demonſtratio. Quadratum C D æquale eſt rectangulo ſub ſagitta A D, & parametro axis. Pariter quadratum E G æquale eſt rectangulo ſub ſagitta C G, & parametro diametri C F. Atqui quadratum E G majus eſt quadrato C D (*n.* 59.); Ergo rectangulum ſub C G, & parametro diametri C F, majus eſt rectangulo ſub A D, & parametro axis. Cum autem A D, C G ſint æquales, erit parameter diametri C F, major parametro axis. Quod erat &c.



Scholion.

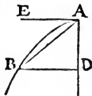
PErspicuum est, ordinatim applicatas ad diametrum aliquam, eò majores esse, quò remotiores sunt a vertice suæ diametri. Nam semper excrescit rectangulum sub latere recto, & parte diametri intercepta; unde & ordinatim posita, & sagitta, necesse est quandoque inter se, & lateri recto sint æquales; cujus rei casus sequentibus Propositionibus demonstrabimus.

PROPOSITIO XV.

64. *SI in data parabola sagitta* AD *sit æqualis lateri recto, etiam ejus ordinata* BD *æquabitur sagittæ* AD.

Et viciſſim, *si sagitta* AD *sit æqualis ejus ordinatæ* BD, *eadem sagitta æquabitur lateri recto ejusdem diametri.*

Demonstratio. Quadratum ordinatæ BD æquale est rectangulo sub sagitta AD, & latere recto. Sed AD ponitur æqualis lateri recto; Ergo quadratum BD æquale est quadrato AD; adeoque rectæ BD, AD sunt æquales.



Et reciproce. Cum enim quadratum BD æquale ponatur quadrato AD; & quadratum BD sit æquale rectangulo sub AD, & latere recto; erit & quadratum AD æquale eidem rectangulo; ac proinde abscissa AD lateri recto æqualis. Quod erat &c.

PRO-

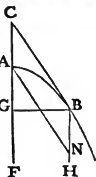
PROPOSITIO XVI.

65. *SI ex vertice* A *diametri cujusvis ducatur* AE, *parallela ordinatis ad diametrum* AD, *ac proinde tangens parabolam in puncto* A, *ex quo ducatur linea* AB, *dividens bifariam angulum* EAD, *occurrensque parabolæ in* B, *unde ordinata ad diametrum ponatur* BD; *Dico, abscissam* AD *æquari lateri recto.*

Demonstratio. Quoniam AE, BD sunt parallelæ, anguli alterni EAB, ABD sunt æquales. Atqui angulo EAB, per hypothesim, æquatur angulus BAD; æquales igitur sunt anguli ABD, BAD, adeoque & lineæ BD, AD; Unde AD, per præced., lateri recto est æqualis. Quod erat &c.

LEMMA I.

66. *SI tangenti* BC *a vertice axis* A *ducatur parallela* AN, *quæ occurrat diametro* BH *in* N, *& a puncto contactus* B *applicetur ordinata* BG *ad axem; Dico, duas sagittas,* AG *axis, &* BN *diametri, esse inter se æquales.*



Demonstratio. Nam propter parallelas, erit BN $=$ AC, & AC $=$ AG (*n.* 47.).

LEMMA II.

67. *Si ex axis* AB *vertice* A *ducatur quævis subtensa* AM, *& ex puncto* M *ordinata* MN *ad eumdem axem; Dico, quadratum subtensæ* AM *æquari rectangulo, quod fit ex axis abscissa* AN *in summam ejusdem abscissæ, & parametri* AD *axis; nimirum*, $\overline{AM}^2 = NA \times \overline{NA + AD}$.

Demonstratio. Quoniam MN est axi ordinata, angulus ANM erit rectus; quare $\overline{AM}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{MN}^2$. Atqui, ob naturam parabolæ (*n.* 35.), $\overline{MN}^2 = NA \times AD$; & $\overline{NA}^2 + NA \times AD = NA \times \overline{AN + AD}$; Ergo $\overline{AM}^2 = NA \times \overline{NA + AD}$. Itaque quadratum subtensæ AM erit æquale rectangulo, quod fit ex abscissa AN in eam, quæ componitur ex eadem abscissa AN, & parametro AD axis. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVII.

68. *In omni parabola, cujuscunque diametri parameter superat parametrum axis quadrupla portione intercepta ab axis vertice, & ordinatim applicatà ab assumptæ diametri vertice.*

Esto

Esto E F diameter parabolæ, cujus ordinatæ æquidistent ipsi subtensæ A M; sitque etiam E H parameter diametri E F; ducaturque ex ejusdem vertice E ordinata E G ad axem; Dico, parametrum E H diametri, superare parametrum A D axis per quadruplam abscissam A G.

Demonstratio. Cum enim subtensa A M a diametro E F secetur bifariam in O, erit M N dupla ipsius E G; adeoque M N quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex E G. Atqui $\overline{MN}^2:\overline{EG}^2::AN:AG$; Ergo A N quadrupla erit ipsius A G. Quia vero ex Lem. I. $AG=EO$, erit eadem A N quadrupla pariter ipsius E O. Hinc, sicuti quadratum A M quadruplum est quadrati A O; ita rectangulum $EH\times AN$ quadruplum erit rectanguli $EH\times EO$; Quare $\overline{AM}^2:\overline{AO}^2::EH\times AN:EH\times EO$. Sed, ob parabolæ naturam, $\overline{AO}^2=EH\times EO$; Ergo $\overline{AM}^2 =EH\times AN$. Et quoniam, per Lem. II., $\overline{AM}^2 =NA\times\overline{NA+AD}$; erit $NA\times\overline{NA+AD}=EH \times NA$; Ergo $EH=NA+AD$. Ergo parameter E H diametri, superabit parametrum A D axis per rectam A N, quæ est æqualis quadruplo ipsius A G. Quod erat &c.

Corollarium I.

69. *Hinc rursum ostenditur, omnium parabolæ parametrorum minimam esse illam, quæ refertur ad axem*. Nam parameter cujusvis alterius diametri superat parametrum axis per quadruplum ejus abscissæ, quam ab ipso axe aufert ordinata, ad axem ducta ex vertice diametri.

Corollarium II.

70. A*Liarum parametrorum illa semper minor est, quæ refertur ad diametrum axi propinquiorem*. Nam, quò magis diameter EF accedit ad axem, eò minor evadit abscissa AG, per cujus quadruplum parameter diametri superat parametrum ipsius axis.

Corollarium III.

71. P*Arametri earum diametrorum, quæ æqualiter hinc inde distant ab axe, sunt æquales*. Nam ordinatæ, quæ ex ipsarum verticibus ducuntur ad axem, eamdem ab ipso axe auferunt abscissam; adeoque idem est excessus, quo parameter cujusque diametri superat parametrum axis.

Scholion.

Q*Uemadmodum jam definitus est excessus, quo parameter cujusque diametri superat parametrum axis; ita præstat jam definire excessum, quo parameter diametri, ab axe remotioris, superat parametrum diametri, eidem axi vicinioris.*

PROPOSITIO XVIII.

72. D*Ifferentia parametrorum, quæ ad duas quasvis diametros referuntur, æquatur portioni, quam ex diametro axi propinquiore, aufert perpendicularis ad eam ducta ex vertice alterius remotioris.*

Maneant enim omnia, ut supra; sitque KL diameter altera, remotior ab axe AB; cujus parameter sit recta KI. Ducatur ex ejus vertice K ad axem AB ordinata KR, quæ occurrat diametro EF in puncto Q; Dico, parametrum KI superare aliam parametrum EH, per quadruplum ipsius EQ.

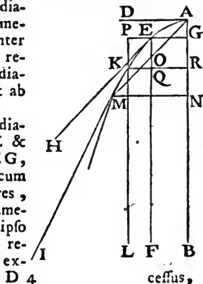
De-

Demonstratio. Nam, ficuti parameter EH eft æqualis parametro AD axis, una cum quadruplo ipfius AG, per præced.; ita parameter KI æqualis erit eidem AD, una cum quadruplo ipfius AR. Quare exceffus, quo parameter KI fuperat parametrum EH, æqualis erit exceffui, quo quadruplum abfciffæ AR fuperat quadruplum abfciffæ AG. Atqui exceffus ifte eft quadruplum ipfius GR, five EQ; Ergo per hoc idem quadruplum parameter KI fuperabit parametrum EH. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIX.

73. *EXceffus, quibus parametri diametrorum fuperant parametrum axis, funt in duplicata ratione rectarum, quibus diametri diftant ab axe.*

Efto AB axis parabolæ, EF diameter propinquior, & KL diameter remotior. Sint autem AD, EH, KI parametri ipfarum. Dico, exceffus, quibus parametri EH, KI diametrorum, fuperant parametrum AD axis, effe inter fe in duplicata ratione rectarum, quibus ipfæ diametri EF, KL diftant ab axe AB.



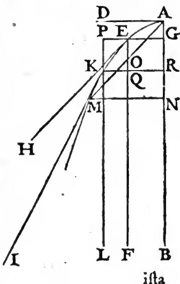
Demonstratio. Ex diametrorum verticibus E & K ducantur ordinatæ EG, KR ad axem; quæ, cum fint axi perpendiculares, metientur diftantias diametrorum EF, KL ab ipfo axe AB. Unde eò res redit, ut demonftremus, ex-

cessus, quibus parametri diametrorum, EH, KI superant parametrum AD axis, esse inter se, uti quadrata ordinatarum, hoc est, distantiarum EG, KR. Nam excessus, quo parameter EH superat parametrum AD axis, est quadruplum abscissæ AG. Pariter excessus, quo parameter altera KI superat eamdem AD, est quadruplum abscissæ AR. Quare excessus, quibus parametri EH, KI diametrorum superant parametrum AD axis, erunt, ut abscissæ AG, AR, & consequenter, ex natura parabolæ, ut quadrata ordinatarum EG, KR. Quod erat &c.

PROPOSITIO XX.

74. ***D**Atis axe parabolæ, ejusque parametro, invenire diametrum, quæ habeat parametrum datam.*

Sit AB axis parabolæ, & AD ipsius parameter. Et quoniam parameter axis est omnium minima; hinc parameter data major esse debet ipsà AD. Capiatur itaque excessus, quo data parameter superat AD; & quadranti ipsius fiat æqualis abscissa AG. Erigatur ex puncto G perpendicularis GE, parabolæ occurrens in E; & ductà per punctum E rectà EF, ipsi AB parallelà; Dico, hanc fore diametrum quæsitam.



Demonst. Esto namque EH parameter ipsius EF. Ex demonstratis parameter ista

ista EH superabit parametrum AD axis per quadruplum abscissæ AG. Atqui ex constructione, per hoc idem quadruplum parameter data superat eamdem AD; Ergo EH æqualis erit datæ parametro; & propterea erit EF diameter quæsita. Quod &c.

PROPOSITIO XXI.

75. D*Atis diametro aliqua parabolæ, ejusque parametro, invenire diametrum aliam, quæ datam habeat parametrum.*

Duos casus distinguere oportet. Vel enim data parameter est major eà, quæ refertur ad diametrum datam; vel vicissim, minor.

Casus I.

ESto EF diameter data, ejusque parameter EH. Capiatur excessus, quo altera data parameter superat parametrum EH; & ejus quadranti æqualis constituatur portio EQ; erigatur deinde ex puncto Q perpendicularis QK, parabolæ occurrens in K; & ductà per punctum K rectà KL, parallelà ipsi EF; Dico, hanc fore diametrum quæsitam.

Demonstratio. Esto enim KI parameter ipsius KL. Ex superius demonstratis, parameter ista KI superat parametrum EH per quadruplum portionis EQ. Atqui ex constructione, per hoc idem quadruplum parameter data superat eamdem EH; Ergo erit KI æqualis datæ parametro; & propterea erit KL quæsita diameter. Quod erat &c.

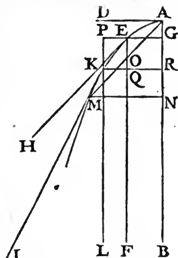
Casus II.

SIt KL diameter data, ejusque parameter KI. Capiatur excessus, quo KI superat reliquam datam parametrum; & quadranti ipsius constituatur æqualis recta KP, ipsi KL in directum existens; erigatur deinde ex puncto P perpendicularis PE, parabo-

læ

læ occurrens in E; ductàque per punctum E rectà EF, ipsi KL parallelà; Dico, hanc esse diametrum quæsitam.

Demonstratio. Sit EH parameter ipsius EF. Itaque ex superius demonstratis, ductà KQ, ipsi EF perpendiculari, parameter KI superabit parametrum EH per quadruplam abscissam EQ, seu KP. Atqui ex constructione, per eamdem quadruplam abscissam eadem KI superat parametrum datam; Ergo erit EH æqualis datæ parametro; & proinde quæsita diameter erit ipsa EF. Quod &c.



Scholion.

76. P*Erspicuum est, propositum Problema esse semper solutionis capax in primo casu; sed non æque semper in secundo; quia fieri potest, ut perpendicularis* PE *minime occurrat parabolæ; quod, quoties contingit, nulla erit diameter, cui data parameter conveniat. Nec id mirum esse debet; nam, si parameter data, minor sit eà, quæ refertur ad axem, patet solvi non posse Problema.*

PROPOSITIO XXII.

77. D*ata parametro* EH *unius diametri* EF, *invenire parametrum cujusvis alterius diametri* KL.

Resolutio. Ex vertice K alterius diametri demittatur super EF perpendicularis KQ. Duo autem contingere possunt: I. ut punctum Q cadat infra verticem E; II. ut idem punctum Q cadat supra verticem E.

In

In priore casu parameter diametri KL major erit parametro diametri EF; in secundo casu erit minor. In utroque autem casu differentia parametrorum est semper quadruplum portionis EQ. Quarè, si contingat, ut punctum Q cadat infra verticem E, invenietur parameter diametri KL, addendo quadruplum ejus portionis ad EH, quæ est parameter ipsius EF. Sin autem accidat, ut punctum Q cadat supra verticem E, habebitur quæsita parameter, subducendo ex EH quadruplum illius portionis.

Scholion.

78. *Fieri quoque potest, ut perpendicularis, quæ demittitur super* EF *ex vertice* K *alterius diametri, cadat in ipsum verticem* E. *In hoc casu, evanescente portione* EQ, *utraque constructio demonstrat, eamdem* EH *esse etiam parametrum diametri* KL; *hoc est, binas diametros* EF, KL *esse æqualiter hinc inde ab axe distantes.*

PROPOSITIO XXIII.

79. *Si ab alternis verticibus duarum parabolæ diametrorum* AB, EF, *ducantur ad easdem ordinatæ* EG, AO; *Dico, has ordinatas esse in subduplicata ratione suarum parametrorum.*

Demonstratio. Sit AD parameter diametri AB, & EH parameter diametri EF. Erit igitur ex natura parabolæ, $\overline{EG}^2 = DA \times AG$; & $\overline{AO}^2 = HE \times EO$. Ergo $\overline{EG}^2 : \overline{AO}^2 :: DA \times AG : HE \times EO$. Quoniam vero (*n. 66.*) ordinatæ EG, AO abscindunt ex diametris AB, EF, portiones æquales; erit abscissa AG æqualis abscissæ EO; Ergo

$$\overline{EG}^2 : \overline{AO}^2 :: DA \times AG : HE \times EO :: AD : HE.$$

Qua-

Quare ipsæ ordinatæ erunt in subduplicata ratione parametrorum. Quod erat &c.

De Foco Parabolæ.

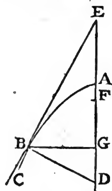
SYNOPSIS.

Quid sit focus, & cui usui. Inventio parametri, ejusque semisseos, & quartæ partis in ipso axe parabolæ; atque hinc inventio foci. Omnes radii axi paralleli, incidentes in superficiem parabolicam, reflectuntur in ipsum focum. Forma parabolica omnium aptissima Solis radiis excipiendis, & reflectendis. Datæ parabolæ focum exhibere. Primariæ foci proprietates demonstrantur. Rectarum, vel per focum transeuntium, vel a puncto foci in tangentes incidentium, mira indoles.

DEFINITIO.

80. Focum *parabolæ appello punctum in axe positum, & distans a vertice axis quarta parte suæ parametri, seu lateris recti.*

Puta, si AD sit axis, & AF quarta pars parametri ejusdem axis, punctum F vocabitur *Focus*, quem alii vocant *Umbilicum* parabolæ. Dicitur autem focus ex peculiari prærogativa, qua fit, ut omnes radii axi paralleli, in curvam parabolicam incidentes, ab eaque reflexi, præcise in illo puncto coeant, & intensissimum calorem producant; quemadmodum de speculis parabolicis docet Catoptrica.



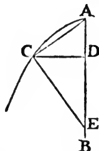
Cum

Cum autem inventio foci eò collimet, ut determinetur in axe punctum hoc, distans a vertice ejusdem, quarta parte suæ parametri; hinc ordiri necesse est.

PROPOSITIO XXIV.

81. *Si a vertice* A *axis* AD *demittatur linea* AC, *occurrens parabolæ in* C, *ex quo ad axem ordinatim applicetur* CD; *ducatur autem & CE normalis ad* AC, *occurrens axi in* E; *Dico*, *rectam* DE *æquari lateri recto ejusdem axis*.

Demonstratio. Quoniam angulus ACE rectus est, & CD normalis ad axem AD, erunt continue proportionales AD, CD, DE; hinc quadrato CD æquatur rectangulum sub AD & DE. Atqui eidem quadrato CD æquale est rectangulum sub eadem abscissa AD, & latere recto; Ergo ED, & latus rectum æquantur. Quod erat &c.



Scholion.

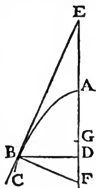
82. *Invento latere recto, seu parametro axis, statim determinatur parabolæ focus ex definitione*.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

83. *SI parabolam* ABC, *cujus axis* AD, *tangat in* B *quævis recta* BE, *occurrens axi producto in* E; *ducaturque ordinata* BD, & BF *normalis ad tangentem, occurrens axi in* F; *Dico, rectam, seu subnormalem* DF *æquari dimidio lateris recti, seu parametri ejusdem axis.*

Demonstratio. Sumatur AG æqualis lateri recto. Quoniam BD ordinata ponitur ad axem, quadratum BD æquale est rectangulo sub DA & AG. Quia vero angulus EBF rectus est, erit idem quadratum BD æquale rectangulo sub ED & DF; Ergo rectangula ED × DF, & DA × AG sunt inter se æqualia; Quare erit ED : DA :: AG : DF. Est autem ED dupla ipsius AD, cùm EB sit tangens (*n.* 47.); Igitur & AG parameter, dupla est rectæ DF; atque adeo DF æqualis dimidio lateris recti. Quod erat &c.

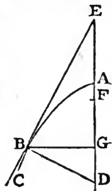


PROPOSITIO XXVI.

84. *SI parabolam* ABC, *cujus axis* AD, *tangat recta* BE, *concurrens cum axe in puncto* E; *ponaturque* BD *ad tangentem* EB *in puncto* B *contactus normaliter; ac denique dividatur* ED *bifariam in* F; *Dico*, FA *quartam partem esse lateris recti.*

Demonstratio. Ponatur BG ordinata ad axem. Quoniam ED est bifariam secta in F, & EG in A, propter tangentem EB (*n.* 47.), erit ED ad EF,

EF, ficut ablata EG ad ablatam EA; Ergo & reliqua GD ad reliquam AF eft, ut tota ad totam, nempe, ut ED ad EF, hoc eft, dupla. Quamobrem AF dimidium eft ipfius GD, ac proinde quarta pars lateris recti; cùm GD lateris recti dimidium fit ex præced. Quod erat &c.



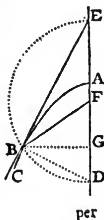
Corollarium.

85. HInc *inventio foci* immediate confequitur; cum focus diftet a vertice parabolæ quarta parte lateris recti. Præterea, cum præcedentes Propofitiones exhibeant varias methodos inveniendi lateris recti, facile focum cujufcunque parabolæ determinabimus.

PROPOSITIO XXVII.

86. S*I in parabola* ABC, *cujus axis* AD, *fiat angulus* EBF *ad contactum, æqualis angulo* BEF *tangentis cum axe, habebitur focus in* F.

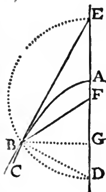
Et reciproce, *fi habeatur focus in* F, *recta* FB *a foco ad contactum, æqualis eft rectæ* FE, *interceptæ inter focum, & concurfum tangentis cum axe; ac proinde anguli* EBF, BEF *erunt inter fe æquales.*



Demonftratur I. pars. Ponatur ordinata BG, & BD normalis ad tangentem EB in puncto contactus B. Quoniam anguli EBF, BEF,

per

per hyp., sunt æquales, erunt & FB, FE lineæ quoque æquales; unde, cum etiam angulus EBD sit rectus, si a centro F, intervallo FE, circulus describatur, transibit is per B & D, ex Elem. Quare EF, FD erunt lineæ æquales; ac proinde, per præced., FA æquabitur quartæ parti lateris recti; Ergo in puncto F habebitur focus, per def. Quod erat primum.



Demonstratur II. pars. Cum angulus EBD ponatur rectus, & BG ordinatim applicata ad axem AD; erit DG æqualis dimidio lateris recti (*n.* 83.), adeoque dupla ipsius AF;

Quare EA:EG::AF:GD;
& permutando, EA:AF::EG:GD;
& componendo, EA+AF:AF::EG+GD:GD;
hoc est, EF:AF::ED:GD;
& iterum permutando, EF:ED::AF:GD.

Quare ED dupla est ipsius EF; & circulus centro F, intervallo FE descriptus, transibit per B & D; eruntque lineæ FB, FE, & anguli FBE, FEB inter se æquales. Quod erat secundum.

PROPOSITIO XXVIII.

87. SI *parabolam* ABC, *cujus axis* AX, *tangat in* C *linea quævis* CE, *concurrens cum axe in* E; *seceturque bifariam* CE *in puncto* F, *ex quo excitetur* FD *normalis ad tangentem*, *occurrens axi in* D; *Dico*, *lineam* AD *esse quartam partem lateris recti*, & *punctum* D *esse focum*.

Demonstratio. Jungatur CD. Quoniam FD normalis

malis est ad tangentem, anguli EFD, CFD æquantur. Sunt autem & rectæ EF, FC, ex hypothesi, æquales, & FD communis; triangula igitur EDF, CDF sunt æqualia, & latera pariter ED, CD æqualia. Quare anguli CED, ECD æquantur; ac proinde (*n.* 86.) linea AD est æqualis quartæ parti lateris recti, & punctum D est focus. Quod erat &c.

E
F B A
D
C
X

Monitum.

Angulos ad lineas, vel superficies curvas, semper sumi notum est penes tangentes.

PROPOSITIO XXIX.

88. *Si parabolam* ABC, *cujus axis* AD, *tangat in* B *recta quævis* GBE, *concurrens cum axe in* E; *demittaturque ex* B *linea* BF *parallela axi; ac fiat angulus* EBH *æqualis angulo* FBG; *Dico*, AH *æqualem esse quartæ parti lateris recti, & punctum* H *esse focum.*

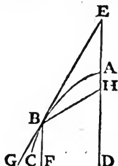
Et reciproce, *si* AH *fuerit quarta pars lateris recti, &* BF *parallela axi; Dico, angulos* EBH, FBG *esse æquales.*

Demonstratur I. pars. Quoniam BF parallela est rectæ ED, angulus AEB æqualis est angulo FBG, hoc est, angulo EBH per hyp. Ergo (*n.* 86.) linea AH æquatur

E
A
H
B
G C F D

quartæ parti lateris recti, & punctum H est focus. Quod erat primum.

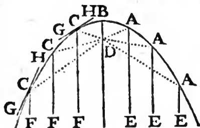
Demonst. II. pars. Quoniam linea AH est quarta pars lateris recti, angulus HBE æqualis erit angulo AEB (*n.* 86.), hoc est, angulo FBG, cum rectæ FB, ED æquidistent. Quod erat alterum.



PROPOSITIO XXX.

89. D*Atæ parabolæ focum exhibere.*

Datæ parabolæ ABC axis sit BD, cui quotvis parallelæ ponantur AE, CF. Agatur autem per C tangens GH; ductàque ex C rectà CD, fiat angulus HCD æqualis angulo FCG. Perspicuum est ex præcedenti Propositione, punctum D esse focum parabolæ, & BD quartam partem lateris recti. Quoniam vero CF repræsentat lineam quamcunque axi parallelam, si in reliquis omnibus parallelis fiat angulus incidentiæ æqualis angulo reflexionis, radii reflexi omnes convenient in puncto D, quod quartam partem lateris recti designat, ac proinde focum datæ parabolæ.



Co-

Corollarium I.

90. ***Hinc omnes radii, axi paralleli, in superficiem parabolicam, & reflexivam incurrentes, reflectuntur in focum.***

Hæc eſt celebris illa parabolæ proprietas, propter quam plerique parabolæ doctrinam plane neceſſariam, & frugiferam cenſuerunt.

Poſtulo itaque, dari corpus parabolicum, reflexionis capax; ſi nempe intelligatur parabola circa immotum axem circumvolvi, & ſuperficiem parabolicam hoc motu deſcribere, & ad hujus formam conflatum eſſe ex materia ſolida vas aliquod, intus lævigatum; Dico, omnem radium luminis, axi parallelum, neceſſario in focum reflecti.

Poſtulo II. Radios ſolares ex ſingulis punctis ſolis ad nos perductos, & in ſuperficiem parabolicam incidentes, aſſumi poſſe, propter immenſam diſtantiam, tanquam phyſice parallelos axi parabolæ; quemadmodum Statici eadem de cauſa in ponderibus deorſum tendentibus ad commune centrum terræ, eumdem parallelismum aſſumunt; non quòd reipſa ſolares radii a ſole emiſſi, ſint paralleli; ſed quòd ob immenſum, nos inter, & ſolem, ſpatium, radii in ſpeculum incidant, ac ſi vere paralleli eſſent; ita ut nulla ad invicem inflexio perceptibilis ſit. Quod ut clarius aſſequaris, finge tibi, e plano ſpeculi duas lineas verſus ſolem eductas, quantumvis minimo angulo ad invicem inclinatas: convenient illæ multo ante, quam ad ſolarem diſcum pervenire poſſint. Finge viciſſim, ex ſolis centro, ſub angulo phyſico, quantumvis minimo ad ſenſum, duos radios educi: non cadent illi in ſuperficiem ſpeculi, ſed immenſo utrinque intervallo a ſpeculo decident. Ratio utriuſque eſt immenſa ſolis a terra diſtantia. Radii igitur ſolares

in ſpeculum incidentes, ut vere paralleli aſſumuntur.

Poſtulo III. Omnem reflexionem fieri ad angulos æquales incidentiæ, & reflexionis; quæ notiſſima lucis proprietas eſt; ac præterea angulos ad ſuperficies curvas, ſumi penes tangentes, uti jam monui.

His animadverſis, facile intelliges, qua de cauſa radii reflexi a ſuperficie parabolica, præciſe in foco coeuntes, intenſiſſimum calorem producant. Quia vero parabolæ focus latitudinem nullam admittit (quod aliter circulo, reliquiſque ſectionibus conicis uſuvenit), fit, ut forma parabolica, omnium ſit aptiſſima radiis ſolis recipiendis, & reflectendis, multoque vehementiores, quam reliquæ figuræ, cauſet effectus. Sed de his alio tempore, & loco, ſi Deus vitam dederit.

Corollarium II.

CORpus luminoſum, poſitum in puncto foci, radios reflexos remittit ad magnam diſtantiam. Cum enim radii paralleli axi, incidentes in ſpeculum, reflectantur in focum; ſic vice verſa radii emiſſi ex puncto foci in ſpeculum, reflectuntur paralleli eidem axi. Sed de his plura in Catoptrica.

Scholion.

CUm autem complures in Catoptrica demonſtrationes pendeant a foci proprietatibus, præcipuas ſeligam, quas hoc loco demonſtrem; ne quidpiam huic operi deſit, quod multo facilius conducere Tironibus poſſit ad reliquas naturalis ſcientiæ partes diſcendas.

PROPOSITIO XXXI.

91. *SI ab axis vertice* A *ducatur tangens* AX, *quæ conveniat cum alia quavis tangente* MX *in puncto*

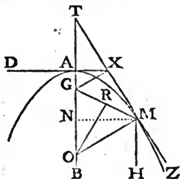
puncto X *mutui occursus; Dico*, *rectam* GX, *ductam ex foco* G *ad punctum* X, *perpendicularem esse tangenti* MX.

Demonstratio. Tangens MX producatur, donec conveniat cum axe in puncto T; & ex contactu M demittatur ad axem ordinata MN. Erit itaque NT : AT :: MN : AX. Est autem NT dupla ipsius AT (*n*. 47.); Quare etiam MN dupla erit ipsius AX; & propterea MN quadratum, quadruplum erit quadrati, quod fit ex AX.

Quoniam vero AG quadrans est parametri AD, erit rectangulum $DA \times AN$ quadruplum quoque rectanguli $GA \times AN$, sive $GA \times AT$; Ergo $\overline{MN}^2 : \overline{AX}^2 :: DA \times AN : GA \times AT$. Atqui ex natura parabolæ, $\overline{MN}^2 = DA \times AN$. Ergo $\overline{AX}^2 = GA \times AT$; ac proinde ex Elementis, angulus TXG erit rectus.

PROPOSITIO XXXII.

92. I*Isdem stantibus*, *recta* GM *conjungens punctum contactus* M *cum foco* G, *æqualis est axis portioni* GT, *quæ inter focum*, & *tangentem existit*.



Demonstratio. Cum enim recta MT tangat parabolam, & ex puncto contactus M ducta sit ad axem ordinata MN, erit AT = AN. Sed AT : AN :: TX : MX; Ergo TX = MX. Hinc duo triangula TGX, MGX habebunt duo latera TX, GX æqualia duobus lateribus MX, GX, alterum alte-

ri. Æquales quoque sunt anguli sub iis lateribus contenti, quoniam uterque est rectus per præced.; Ergo eorundem bases GT, GM pariter æquales erunt.

Corollarium.

Hinc, si per punctum contactus M ducatur MH, parallela axi AB, rursum ostenditur, æquales fore angulos, quos rectæ GM, MH constituunt cum tangente. Nam, propter parallelas, angulus HMZ æquatur angulo T, hoc est, angulo GMT, in triangulo isoscele TGM.

PROPOSITIO XXXIII.

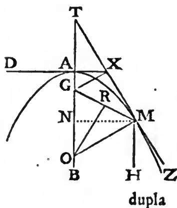
93. *Iisdem stantibus, a puncto contactus* M *excitetur perpendicularis* MO, *occurrens axi in* O; *ducaturque* MH *parallela axi;*

Dico I., perpendicularem MO *dividere bifariam angulum* GMH, *contentum sub rectis* GM, MH;

Dico II., duas axis portiones TG, OG *esse inter se æquales.*

Demonstratur I. pars. Nam (*n.* 88.) rectæ GM, MH constituunt cum tangente MT angulos æquales. Sed æquales quoque sunt anguli, quos cum eadem tangente efficit perpendicularis MO; Ergo angulus GMO æqualis angulo HMO. Quod erat &c.

Demonstratur II. pars. Nam portio NO semissem adæquat parametri AD (*n.* 83.); ac proinde dupla est portionis AG. Rursum (*n.* 47.) portio NT dupla



dupla est ipsius AT; Ergo tota TO dupla totius TG; & consequenter TG=OG. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIV.

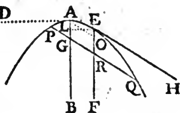
94. *Iisdem stantibus, si ex puncto* O *demittatur super rectam* GM *perpendicularis* OR; *Dico, abscissam portionem* MR *æqualem fore dimidio parametri* AD, *qui refertur ad axem.*

Demonstratio. Nam, per præced., TG=OG. Est autem ex dictis TG=GM; Ergo OG=GM; & consequenter anguli GMO, GOM inter se æquales. Hinc duo triangula rectangula OMR, ONM æquiangula erunt; & propterea MO:MR::MO:NO; hinc MR=NO. Sed NO semissis est parametri AD (*n.* 83.); Ergo MR semissis erit ejusdem AD. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXV.

95. *Si per focum* G *ducatur recta* PQ, *utrinque ad parabolam terminata; Dico, rectam* PQ *æqualem esse parametro illius diametri, quæ eamdem, velut suam ordinatam, agnoscit.*

Sit enim EF diameter, ad quam PQ, tanquam ordinata, refertur; sitque EH parameter istius diametri; ostendendum est, duas PQ, EH æquales esse inter se.



Demonstratio. Super axe AB demittatur perpendicularis EL. Constat n. 68., parametrum EH diametri EF, æqualem esse parametro AD axis AB, una cum qua-

druplo ipsius AL. Sed parameter AD quadrupla est ipsius AG (*n.* 81.); Ergo eadem parameter EH $=4AG+4AL$.

Ducatur deinde a vertice axis alia ad diametrum ordinata AO. Quoniam $AG=OR$, propter parallelismum ordinatarum, & diametrorum; & præterea (*n.* 66.) $AL=EO$; hinc $AG+AL=EO+OR=ER$; quare parameter $EH=4AG+4AL=4ER$. Sed ex natura parab., $EH:PR::PR:ER$; Ergo $\overline{EH}^2:\overline{PR}^2::EH:ER$. Jam vero, quia $EH=4ER$, erit etiam $\overline{EH}^2=4\overline{PR}^2$; & consequenter $\overline{EH}^2=\overline{PQ}^2$. Ergo $EH=PQ$. Quod erat &c.

De Directrice Parabolæ.

SYNOPSIS.

Directrix parabolæ quid sit, ejusque usus. Datis axe, & foco, parabolam in plano describere, ope directricis; atque hinc per regressum demonstrantur rursus primariæ affectiones parabolæ. Directricis proprietates variæ. Datis foco, & directrice, duci potest tangens ad quodlibet parabolæ datum punctum.

DEFINITIO.

96. Sit AP axis parabolæ, ejusque focus F. Ultra verticem A extendatur axis ad punctum E, ita

ita ut duæ rectæ A F, A E inter se sint æquales; tum ex puncto E erigatur utrinque perpendicularis B E C; hanc voco parabolæ *Directricem*; cujus usum mox comperies in descriptione, ac genesi ipsius parabolæ:

LEMMA.

97. *In omni parabola, si ex puncto contactus* B *ad axem* A D *demittatur ordinata* B G, *&* *ex foco* F *ad idem punctum contactus ducatur recta* F B; *Dico, eamdem rectam* F B *æquari summæ duarum rectarum* A F + A G.

Demonstratio. Nam propter tangentem B E, duæ portiones A G, A E sunt inter se æquales; Quare apposita communi A F, erit tota E F = A F + A G. Atqui recta F B ostensa est n. 86. æqualis ipsi E F; Ergo F B = A F + A G.

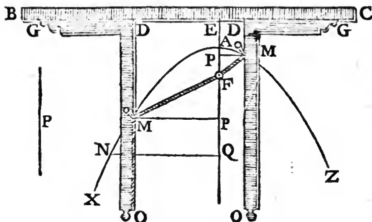
Corollarium.

98. I*N omni parabola, si ex foco* F *ad quodvis punctum* M, *sumptum in perimetro parabolæ, ducatur recta* FM; *Dico, hanc fore æqualem portioni axis producti* PE, *& intercepti ab eadem ordinata* MP, *& directrice* BEC. Nam per def. directricis, est AF=AE. Est autem per Lemma, FM=AP +AF; Ergo FM=AP+AE=EP.

PROPOSITIO XXXVI.

99. D*Atis axe* AP, *& foco* F, *parabolam in plano describere, ope directricis* BC.

Constructio. Axis AP producatur ultra verticem A, donec AE=AF; & per punctum E ducatur perpendicularis, seu directrix BEC. Assumatur norma quævis GDO, cujus latus unum GD directrici aptetur, & normaliter insistat; & sumpto filo FMO, æqualis prorsus longitudinis cum altero la-



tere

tere DO ejusdem normæ, alligentur extrema ejusdem fili punctis F & O. Feratur postea norma GDO supra directricem BED, ea quidem lege, ut latus GD directrici semper adhæreat; eodemque tempore, ope stili, una cum norma, feratur etiam filum; sed ita tamen, ut portiones ejus maneant continuo tensæ, ejusque pars MO, dum successive filum evolvitur, semper adhærescat lateri OD ejusdem normæ; Dico, curvam AMX, quæ per stilum M hoc motu describitur, esse portionem parabolæ.

Si vero ad alteram partem puncti fixi, seu foci F, vertatur norma, describetur eadem methodo portio altera AMZ ejusdem parabolæ; ita ut curva XAZ sit parabola quæsita.

Demonstratio. Nam ex ipsa curvæ descriptione patet, ejus naturam hanc esse, ut si ex aliquo ejus puncto M demittatur ad axem AP perpendicularis MP, duæ MF, MD ex constructione sint æquales, hoc est, MF æquetur ipsi EP. Atqui $EP = AP + AF$; Ergo $MF = AP + AF$; ac proinde per Lemma, curva sic descripta, erit parabola.

Corollarium I.

100. PErspicuum est autem, parabolam eo motu descriptam, necessario transire per punctum A, verticem axis AP; eòque majorem parabolæ portionem exposita methodo describi, quò longius assumatur latus DO normæ, ac longius filum.

Corollarium II.

H*Inc, datis axe* AP, *cujus punctum* A *sit vertex, & parametro* p *axis, describitur parabola* XAZ. Nam super axe AP, utrinque a puncto A, sumptis partibus AF, AE, quarum singulæ æquent quadran-

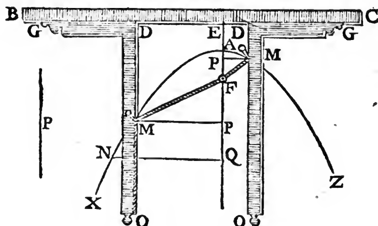
drantem suæ parametri p, ductaque per punctum E perpendiculari indefinita BC super FE; tum latus inferius normæ applicetur rectæ BC, quæ vicem directricis obibit; ac reliqua peragantur, ut in constructione Problematis.

Corollarium III.

QUoniam per Lemma, & constr. Probl., $MF = AP + AF$, ac præterea $p = 4AF$; hinc rursum per regressum ostendi potest, curvæ sic descriptæ convenire primariam parabolæ proprietatem, definitione nominis assumptam; nimirum,

I. Quadratum cujusvis ordinatæ MP *ad axem* AP, *æquari rectangulo parametri* p *in abscissam* AP *axis*, *sumptam inter ejus originem* A, *&* *occursum* P *ordinatæ*.

Ut autem calculo litterali multò compendiosius demonstratio conficiatur, voco AF, m; indeterminatas AP, x, PM, y. Itaque $MF = AF + AP = m + x$; & $PF = x - m$, vel $m - x$; prout pun-



ctum

ctum P reperietur supra, vel infra focum F. Itaque triangulum rectangulum MPF in utroque casu exhibet hanc æquationem, $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx)$ $= \overline{MP}^2 (yy) + \overline{PF}^2 (mm - 2mx + xx)$; hinc facta reductione æquationis, elicitur $4mx = yy$. Cum autem $4m = 4AF = p$; si ipsi $4m$ substituatur p, habebitur $yy = px$.

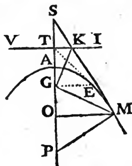
II. Si ducantur duæ ordinatæ quæcunque MP, NQ *ad axem* AP, *earum quadrata erunt inter se, uti abscissæ* AP, AQ.

Nam $\overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 :: p \times AP : p \times AQ :: AP : AQ$.

PROPOSITIO XXXVII.

101. *Si a quovis parabolæ puncto* M *ducatur tangens* MS, *conveniens cum axe* AP *in puncto* S, *& ex puncto contactus* M *demittatur ad eumdem axem ordinata* MO; *Dico, portionem axis interceptam a foco* G, *& puncto* O *occursus, æquari portioni ejusdem axis producti, quæ intercipitur a tangente, & directrice* VTI; *hoc est*, $GO = TS$.

Demonstratio. Ducatur a foco G ordinata GE, & a puncto E tangens ET, quæ conveniet cum axe in puncto T ejusdem directricis; nam (*n.* 47.) $AT = AG$. Similiter, quoniam recta MS tangit parabolam, & ex puncto contactus M ducta est ad axem ordinata MO, erit $SA = AO$. Ergo etiam differentia duarum $SA - AT$ æquabitur differentiæ duarum $AO - AG$; hoc est, $GO = TS$. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

102. *Iisdem manentibus, si eadem tangens* MS *occurrat directrici* VTI *in puncto* K, *& a puncto contactus* M *erigatur perpendicularis* MP, *conveniens cum axe in* P; *Dico, rectangulum ex* MO *in* TK *æquari rectangulo* POG;

Hoc est, $MO \times TK = PO \times OG$.

Demonstratio. Cum enim triangulum PMS sit rectangulum in M, & ex angulo recto demissa sit ad hypotenusam perpendicularis MO; erit

	PO : MO :: MO : OS;
& propter similia triangula,	MO : OS :: TK : TS;
& per præced.,	TK : TS :: TK : GO.
Ergo ex æquo,	PO : MO :: TK : GO;
& consequenter	$MO \times TK = PO \times OG$.

Quod erat &c.

Corollarium.

103. Hinc etiam sequitur, rectangulum $MO \times TK = TG \times GO$. Cum enim recta MP sit perpendicularis tangenti MS in puncto contactus M, erit portio axis PO æqualis dimidio parametri ejusdem axis, & consequenter dupla portionis AG (*n*. 83.). Atqui etiam TG dupla est ejusdem AG, propter tangentem ET; Ergo duæ portiones PO, TG sunt æquales; Ergo rectangula POG, TGO sunt inter se æqualia. Jam vero, per præced., $MO \times TK = PO \times OG$; Ergo $MO \times TK = TG \times GO$.

S V T K I A G E O M P

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

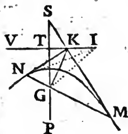
104. *SI a foco* G *ad punctum contactus* M, *&* *ad punctum* K, *ubi tangens intersecat directricem, ducantur rectæ* GK, GM, *rectus erit angulus* KGM, *qui sub iis continetur.*

Demonstratio. Cum enim ostensum sit MO×TK = TG×GO, erit TG:TK::MO:GO. Quare duo triangula rectangula GKT, MOG habebunt circa angulos rectos latera proportionalia; & consequenter æquiangula erunt. Angulus igitur TGK æqualis erit angulo GMO; unde apposito communi angulo OGM, erunt anguli TGK+OGM=GMO+OGM. Sed hi duo anguli simul sumpti unum rectum adæquant; Ergo etiam uni recto æquales sunt priores duo TGK+OGM; Ergo angulus KGM pariter rectus erit. Quod &c.

PROPOSITIO XL.

105. *SI per focum* G *ducatur recta* MN, *utrinque ad parabolam terminata, &* *in punctis* M *&* N *contingant parabolam rectæ* MS, NK; *Dico, tangentes istas super directrice* TV *sibi mutuo occurrere in puncto* K.

Demonstratio. Si enim fieri potest, secent tangentes illæ directricem in punctis diversis; nimirum, tangens quidem MS in puncto K; tangens vero alia NI in puncto I; tum jungantur rectæ GK, GI.



Quoniam recta MK tangit parabolam, eaque occurrit directrici in puncto K; erit per præced., angulus KGM rectus; ac

pro-

proinde rectus pariter angulus KGN, qui ad alteram partem existit.

Eadem ratione, quia recta NI tangit parabolam, eaque supponitur secare directricem in alio puncto I; erit per præced., angulus IGN rectus. Ergo duo anguli KGN, IGN æquales erunt inter se; quod fieri nequit.

PROPOSITIO XLI.

106. *SI per focum* G *ducatur recta* MN, *utrinque ad parabolam terminata, & actis tangentibus* MK, NK, *sibi mutuo occurrentibus in* K, *jungatur recta* GK; *Dico, hanc esse perpendicularem rectæ* MN.

Demonstratio. Referat VTI directricem parabolæ. Per præced., tangentes duæ sibi mutuo occurrent in puncto K ejusdem directricis; quare (*n.* 104.) omnino necesse est, ut rectus sit uterque angulorum KGM, KGN; atque adeo, ut ipsa GK sit perpendicularis rectæ MN. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLII.

107. *DAtis foco, & directrice, duci potest tangens ad quodlibet parabolæ datum punctum.*

Referat recta VT directricem parabolæ; sitque punctum G focus ejusdem. Oporteat ad punctum N tangentem ducere.

Resolutio. Ex foco ad punctum N ducatur recta GN, cui ex eodem foco G perpendicularis excitetur GK, con-

S
V T K I
N
G
M
P

ve-

veniens cum directrice in puncto K; jungantur denique puncta N & K per rectam NK; Dico, hanc fore tangentem quæsitam.

Demonstratio. Si enim fieri potest, contingat parabolam in puncto N recta quævis alia NI, quæ conveniat cum directrice in puncto I; ducaturque recta GI. Angulus IGN erit rectus (*n.* 104.). Sed ex constructione rectus pariter est angulus KGN; Quare duo anguli IGN, KGN æquales inter se erunt; quod fieri non potest.

De Quadratura Parabolæ.

SYNOPSIS.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum, quod majus est dimidio parabolæ, cui inscribitur, & quadruplum est triangulorum, quæ residuis parabolæ segmentis inscribuntur. Tota triangulorum maximorum series residuis segmentis in infinitum inscripta, æqualis est parabolæ; hæc ad triangulum maximum inscriptum, habet eam proportionem, quam 4 ad 3. Triangulum maximum triplum est residuorum segmentorum. Dato segmento parabolico triangulum æquale construere. Parabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem, quam triangula maxima, illis inscripta. Triangulum mixtum concavum parabolicum, duplum est convexi. Spatia parabolica invicem comparata.

LEMMA.

108. *SI in parabola* CAD *ad quamlibet diametrum* AB *applicetur ordinata* CBD, *sitque alia quæcunque diameter* EF *terminata eàdem lineà* CD; *Dico*, EF *minorem esse*, *quàm* AB.

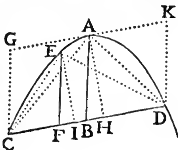
Demonstratio. Per punctum A ducatur GA, parallela ordinatim applicatæ CD; hæc erit tangens (*n.* 56.), & cadet extra parabolam; Ergo linea EF ad eam non pertingit; & consequenter EF minor est, quàm BA.

PROPOSITIO XLIII.

109. *DAtæ parabolæ* CAD *terminatæ maximum inscribere triangulum*.

Parabolam CAD subtendat quævis CD, qua divisa bifariam in B, ponatur diameter AB, cui parallela ducatur EF; ducanturque rectæ a punctis A & E, nimirum, AC, AD, & EC, ED; Dico, triangulum CAD esse majus triangulo CED, & quovis alio, quod in eadem parabola terminata inscribi possit.

Demonstratio. Si enim ex punctis A & E ducantur ad CD perpendiculares AH, EI, fient triangula æquiangula FEI, BAH; & cùm EF minor sit, quàm AB per Lem., etiam EI minor erit, quàm AH. Quare triangulum CAD majus est triangulo CED, cum habeat eamdem basim, & majorem altitudinem. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO XLIV.

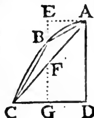
110. P*Arabolæ terminatæ maximum triangulum* CAD *inſcriptum, majus eſt dimidio parabolæ.*

Demonſtr. Perficiatur parallelogrammum CGKD, quod majus eſt parabola CEAD. Igitur & CAD triangulum, dimidium ſcilicet parallelogrammi, majus erit dimidio parabolæ. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLV.

111. S*I ad parabolæ* ABC *diametrum* AD *applicetur ordinata* CD, *ducaturque* AC, *quæ dividatur biſariam in* F, *ductaque rurſum diametro* BF, *jungantur rectæ* AB, CB; *Dico, triangulum* CAD *quadruplum eſſe trianguli* ABC.

Demonſtratio. Agatur per A tangens AE, occurrens in E diametro BF, quæ producta ſecet DC in G. Quoniam AE, CD ſunt parallelæ (*n.* 56.), erit CF:FA::GF:FE. Atqui, per hyp., CF = FA; Ergo GF = FE; ac proinde triangulum EAF æquale triangulo CFG. Atqui triangulum EAF æquatur triangulo CBA, quia EB, BF lineæ æquales ſunt (*n.* 56.); Igitur triangulum CFG æquale eſt triangulo ABC. Eſt autem triangulum CAD quadruplum trianguli CFG; quia AD dupla eſt rectæ FG, & CD pariter dupla rectæ CG; Ergo triangulum CAD erit pariter quadruplum trianguli ABC. Quod erat &c.



PROPOSITIO XLVI.

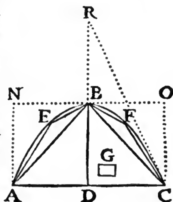
112. *SI parabolæ* AEBFC *inſcribatur triangulum maximum* ABC, *& inſcribantur præterea reſiduis ſegmentis triangula maxima, atque ita porro ſemper fiat; Dico, toti triangulorum ſeriei æqualem eſſe parabolam* AEBFC.

Demonſtratio. Nam triangula ſine fine inſcripta, deſinunt in parabolam; ac proinde ultimæ rationes ſunt rationes æqualitatis; uti fuſius oſtendi in diſſertatione de methodo geometrica, ad calcem tom. II. Geom. Solid.

Aliter, juxta methodum exhauſtionum ab antiquis Geometris adhibitam, Euclide, Apollonio, & Archimede; uti expoſui in eadem diſſertatione pag. 196.

Si enim parabola AEBFC æqualis non ſit toti triangulorum ſeriei; major igitur eſt, vel minor.

Sit primum parabola major tota triangulorum ſerie; & exceſſus ponatur quantitas G. Quoniam triangulum ABC maximum eſt illorum, quæ parabolæ inſcribi poſſunt, majus quoque erit dimidio parabolæ, cui inſcriptum eſt (*n.* 110.). Similiter triangula duo AEB, BFC majora ſunt dimidiis ſegmentorum, quibus inſcribuntur. Quod, cum ſine termino continuari poſſit, relinquetur ex parabola quantitas quavis data minor; ergo & minor quantitate G; & conſequenter illa non eſt exceſſus, quo



para-

parabola triangulorum seriem excedit; ergo parabola major non est totà triangulorum serie.

Sed neque minor esse potest, cum triangulorum series, per hyp., semper intra parabolam continuetur; ac proinde series illa, quantumcunque aucta plurium triangulorum additione, semper tamen pars maneat parabolæ. Quare, cum nec major, nec minor sit parabola triangulorum serie, æqualis ut sit, necesse est. Quod erat &c.

LEMMA.

113. *Si detur series infinita quantitatum decrescentium in ratione quadrupla, erit aggregatum omnium ad primum terminum, ut quatuor ad tria.*

Demonstrationem habes in meis Commentariis Arith. univers. Parte III. de progressionibus Geometricis infinitis Prop. 34. n. 236.

Nam, si progressio quæcunque geometrica descendendo in infinitum continuetur, erit, ut denominator unitate mulctatus, ad unitatem; ita primus, seu maximus terminus ad reliquam infinitorum terminorum summam; quare, si series decrescat in ratione quadrupla, primus, seu maximus terminus est triplus summæ reliquorum infinitorum; Ergo aggregatum omnium ad primum terminum est, ut quatuor ad tria.

PROPOSITIO XLVII.

114. *Parabola* AEBFC *ad triangulum maximum* ABC *eam habet proportionem, quam* 4 *ad* 3, *seu est sesquitertia trianguli maximi, in ipsa inscripti.*

Demonstratio. Triangulum maximum inscriptum

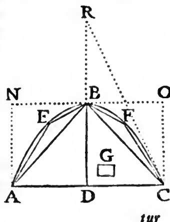
ABC quadruplum est triangulorum maximorum AEB, BFC, quæ residuis inscribuntur segmentis; & illa rursus simul sumpta, quadrupla triangulorum residuis segmentis inscriptorum; atque ita sine termino (*n.* 111.). Ergo tota triangulorum series, ideft, parabola (*n.* 112.), est ad triangulum ABC, primum seriei terminum, ut quatuor ad tria, per Lemma. Quod erat &c.

Corollaria.

115. Sequitur I., *triangulum maximum* ABC *triplum esse residuorum segmentorum* AEB, BFC. Cum enim tota parabola ad triangulum maximum inscriptum sit, ut quatuor ad tria, patet, ipsum triangulum tres quintas continere parabolæ; adeoque & residuorum esse triplum.

Sequitur II., *segmenta* AEB, BFC *esse inter se æqualia*. Nam triangula ABD, BDC, singula singulorum tripla sunt, & inter se æqualia.

III. *Si a vertice* B *diametri* BD *ducatur* NBO, *parallela basi* AC, *ac perficiatur parallelogrammum, triangulum* ABC *erit semissis parallelogrammi circumscripti* ANOC. Quare parabola ad circumscriptum parallelogrammum erit, ut 4 ad 6, seu, ut 2 ad 3; ac proinde æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejusdem parallelogrammi; & semiparabola AEBD æquabitur $\frac{2}{3}$ rectanguli ANBD.



IV. *Si ab extremitate* C *ordinatæ* CD, *quæ terminat semiparabolam* DBC, *ducatur*

tur tangens CR, *eadem semiparabola* DBC *æquabitur* $\frac{2}{3}$ *trianguli* DRC. Nam hoc triangulum æquatur rectangulo DBOC; cùm DB sit semissis totius DR (*n.* 47.); & semiparabola sit æqualis $\frac{2}{3}$ hujus rectanguli DBOC.

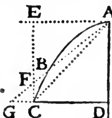
Habes hinc varias methodos metiendi parabolam terminatam, semiparabolam, & segmentum parabolicum.

PROPOSITIO XLVIII.

116. *Dato segmento parabolico triangulum æquale construere.*

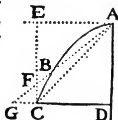
Sit ABC segmentum parabolæ datum, subtensà AC comprehensum; ductaque diametro AD, applicetur ordinata CD; agaturque per A, ordinatæ CD parallela AE, occurrens in E rectæ CE, erectæ ex puncto C, & parallelæ diametro AD; tum EC ita dividatur in F, ut FC sit quarta pars ejusdem; denique ducatur ex A per F recta AG, occurrens ipsi DC in G; Dico, GAC triangulum æquale esse dato segmento ABC.

Demonstratio. Quoniam AE, CG sunt parallelæ, erit CF:FE::GC:EA. Atqui CF est tertia pars rectæ FE; Ergo & GC est tertia pars ipsius EA=CD; Quare GAC triangulum tertia pars est trianguli CAD. Est autem ABCA segmentum parabolicum æquale tertiæ parti trianguli CAD ex Coroll. præced.; Ergo & GAC triangulo est æquale, segmentum ABCA. Dato igitur segmento parabolico æquale triangulum exhibuimus. Quod erat &c.



Corollarium.

117. HInc patet, triangulum GAD æquale esse parabolæ ABCD, adeoque eadem praxi solvi Problema, quo petitur, datæ parabolæ triangulum æquale exhiberi.



PROPOSITIO XLIX.

118. P*Arabolæ terminatæ eam inter se sortiuntur rationem, quam triangula maxima illis inscripta.*

Demonstratio. Sint parabolis terminatis triangula maxima inscripta: Dico, parabolas eam inter se rationem habere, quam triangula maxima. Nam triangulum quodvis ad suam respective parabolam, cui inscribitur, eamdem habet rationem, nempe, ut 3 ad 4 (*n.* 114.); Ergo permutando, ut triangulum ad triangulum, sic parabola ad parabolam. Quod erat &c.

Corollarium.

119. HInc, si duæ parabolæ habeant eamdem, vel æqualem subtensam, erunt illæ inter se, ut altitudines. Et, si altitudines fuerint æquales, erunt inter se, ut bases.

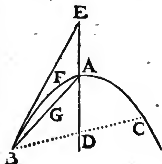
PRO-

PROPOSITIO L.

120. *TRiangulum mixtum concavum parabolicum, duplum est convexi.*

Parabolam BAC tangat in B recta EB, conveniens cum diametro quacumque AE in E; jungaturque AB; Dico, figuram concavam BFAEB duplam esse convexæ BFAGB.

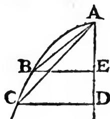
Demonstratio. Ex puncto B ducatur ordinata BC ad diametrum AD. Quoniam BE tangens est, erit AD=AE; hinc ABD, ABE triangula æqualia. Est autem ABD triangulum, triplum segmenti BFAGB (*n.* 115.); Igitur & triangulum ABE triplum est ejusdem segmenti. Quamobrem residua figura concava BFAEB dupla est convexæ BFAGB. Quod erat &c.



PROPOSITIO LI.

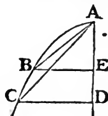
121. *SI parabolam* ABC, *cujus diameter* AD, *secent utcunque rectæ* AB, AC, *ducanturque ordinatæ* BE, CD; *Dico, spatium parabolicum* EBCD *quadruplum esse spatii* CABC, *lineis* AB, AC, *&* *parabolicà* BC *contenti*.

Demonstratio. Quoniam parabola DABC quadrupla est segmenti ABC, &



para-

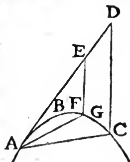
parabola EAB quadrupla ſegmenti AB (*n.* 115.), erit parabola DABC ad ſegmentum ABC, uti parabola EAB ad ſegmentum AB. Ergo, cùm parabola DABC ad ABC, hoc eſt, totum ad totum, ſit, ut EAB ablatum ad AB ablatum; erit reliquum EBCD ad reliquum ACBA, ut totum DABC ad totum ABC; Quare figura EBCD quadrupla eſt figuræ, lineis AC, AB, & parabolicà BC contentæ. Quod erat &c.



PROPOSITIO LII.

122. SI *parabolam* ABC *tangat linea quæcumque* AD, *conveniens cum diametris quibuſvis* DC, FE, *in punctis* D & E, *junganturque* AF, AC; *Dico, concavum* EDCGF *duplum eſſe partis convexæ* AFGC, *lineis* AF, AC *contentæ.*

Demonſt. Concavum ABCDA duplum eſt parabolæ ABC (*n.* 120.); & ſimiliter concavum ABFEA duplum eſt ſegmenti parabolici ABF; Igitur reſiduum EDCGF duplum eſt reſidui AFGCA. Quod erat &c.



De

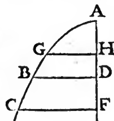
De Proportionalitate Rectarum, & Rectangulorum in Parabola.

SYNOPSIS.

Qua certa lege ordinatæ in parabola possint esse continue proportionales. Recta quævis duabus diametris occurrens, vel ab iisdem terminata, dividi potest in partes continue proportionales. Hinc rectangulorum æqualitas. Rectarum inter se cum rectangulis proportio. Qua ratione diametri subtensas omnes in parabola ita secent, ut rectangula omnia sub segmentis sint invicem æqualia. Diametrorum inter se cum rectangulis proportio. Rectangulorum proportio. Recta quævis duas subtensas parallelas utcunque secans, efficit rectangula sub segmentis subtensarum, proportionalia rectangulis sub segmentis ejusdem rectæ secantis. Similiter latera trianguli inscripti, a duabus parallelis secta, aliam rectangulorum proportionem determinant. Rectangulorum ratio triplicata rationis ordinatarum. Parallelogramma continue proportionalia.

PROPOSITIO LIII.

123. *SI in parabola* ABC *diameter* AF *intelligatur divisa in punctis* H, D, F, *hac lege, ut* AH, AD, AF *sint continue proportionales; Dico, ab iisdem punctis ordinatas* HG, DB, FC *esse in continua analogia.*



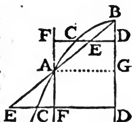
Demonstratio patet ex Elem.; cum abscissæ AH, AD, AF & sint continue proportionales, & duplicatam habeant rationem rectarum HG, DB, FC.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

124. *SI parabolam* ACB *secent duæ quævis diametri* AF, BD, *junctisque diametrorum verticibus* AB, *ponatur ad diametrum* BD *ordinatim applicata ex quovis puncto* C, *recta* CD, *occurrens rectis* AB, AF *in punctis* E & F; *Dico, rectas* FD, CD, ED *esse continue proportionales*.

Demonstratio. Ex A ducatur ordinata AG: erit BD:BG::ED:AG, seu FD. Atqui, ex natura parabolæ, BD ad BG duplicatam habet rationem ejus, quam habet DC ad AG, sive FD; Ergo ratio quoque ED ad FD, duplicata est rationis DC ad FD; Ergo rectæ ED, DC, FD sunt continue proportionales. Quod erat &c.



Corollarium.

IIsdem positis, quæ supra, sequitur, rectangulum $FD \times CE = FC \times CD$. Cum enim

$$FD:CD::CD:ED,$$

erit $FD:CD::FD-CD:CD-ED::FC:CE$; Ergo $FD \times CE = FC \times CD$.

PROPOSITIO LV.

125. *IIsdem positis, quæ supra. Dico, rectangulum* $CF \times FG = DF \times FE$ *rectangulo*.

Ca-

Casus I.

Demonstratio. Primò cadat punctum F extra parabolam. Quoniam recta GC secta est bifariam in D, eique in directum adjecta est recta GF, erit per *6*. lib. 2. Euclid., ut etiam in nostris Elem. facile deducitur ex n. 509., rectangulum

$$GF\times FC+\overline{GD}^2=\overline{FD}^2.$$

Atqui per 4. lib. 2. Euclid., & in nostris Elem. n. 508.,

$$\overline{FD}^2=EF\times FD+ED\times DF;$$

& per præced. $ED\times DF=\overline{GD}^2$;

Ergo $GF\times FC+\overline{GD}^2=EF\times FD+\overline{GD}^2$.

Quamobrem $GF\times FC=EF\times FD$.

Quod erat &c.

Casus II.

Secundò cadat punctum F intra parabolam. Quoniam recta GC secta est bifariam in D, & non bifariam in F, erit per 5. lib. 2. Euclid., & in nostris Elem. n. 513., $GF\times FC+\overline{FD}^2=\overline{GD}^2$;

hoc est, per præced., $=FD\times DE$,

& rursum ex nostris Elem., $=EF\times FD+\overline{FD}^2$.

Ergo $GF\times FC+\overline{FD}^2=EF\times FD+\overline{FD}^2$;

Quare, dempto communi $\overline{FD}^2$, manet

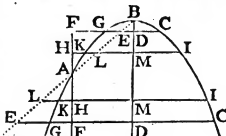
$$GF\times FC=EF\times FD.$$

Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

126. *IN parabola* ABC *sint iterum duæ quævis diametri* AF, BD; *&* *ad diametrum* BD *applicentur quidem ordinatæ* GC, KI, *occurrentes diametro* FA *in* F *&* H, *sive extra parabolam, sive intra parabolam; Dico, in utroque casu ita esse* AH *ad* AF, *uti* IHK *rectangulum ad rectangulum* CFG.



Demonstratio. Ducta recta AB secet rectas FC, HI in punctis E & L. Erit itaque per præcedentem,

$LH \times HM = KH \times HI$,

& $EF \times FD = GF \times FC$;

unde $KH \times HI : GF \times FC :: LH \times HM : EF \times FD$.

Atqui $LH \times HM : EF \times FD :: LH : EF$;

nam $HM = FD$;

est autem $LH : EF :: AH : AF$;

Ergo $KH \times HI : GF \times FC :: AH : AF$.

Quod erat &c.

Corollarium.

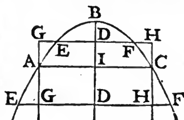
127. HInc sequitur quoque, $AH : AH :: IH \times HK : IH \times HK$. Nam $AH : AH :: HL : HL :: LH \times HM : LH \times HM$. Atqui, per præced., rectangulis $LH \times HM$ æqualia ostensa sunt rectangula $IH \times HK$; Ergo $AH : AH :: IH \times HK : IH \times HK$.

LEM-

LEMMA.

128. SI in parabola ABC æquidiſtent rectæ AC, EF, & ex punctis A & C ducantur diametri AG, HC, occurrentes rectæ EF in G & H; Dico, ſegmenta EG, FH eſſe inter ſe æqualia.

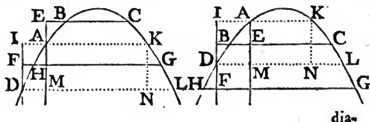
Demonſtratio. Ducatur ID diameter rectarum AC, EF; quæ, cum ſint ordinatim applicatæ ad eamdem diametrum ID, erunt bifariam ſectæ in D & I. Atqui etiam GH eſt bifariam ſecta in D; nam GH=AC; Ergo reliquæ EG, HF ſunt inter ſe æquales.



PROPOSITIO LVII.

129. P*Arabolam* ABC *ſecent in* A *&* D *diametri duæ æquales* AE, DF; *& ex punctis* E *&* F *quævis ducantur parallelæ* EC, FG, *occurrentes perimetro parabolæ in punctis* B, C, H, G; *Dico, rectangula* BE×EC, HF×FG *eſſe inter ſe æqualia*.

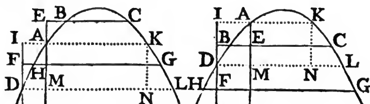
Demonſtratio. Ex punctis D & A ducantur rectæ DL, AK, parallelæ ipſi FG; & AK quidem occurrat diametro DF in I; & DL occurrat in N



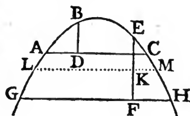
dia-

diametro KN, demissæ ex puncto K; recta vero AE producta secet DL in M.

Per Coroll. præced. $DF : DI :: HF \times FG : AI \times IK$;
& $AE : AM :: BE \times EC : DM \times ML$.
Atqui $AE = DF$, & $DI = MA$;
Ergo $HF \times FG : AI \times IK :: BE \times EC : DM \times ML$.
& perm. $HF \times FG : BE \times EC :: AI \times IK : DM \times ML$.
Jam vero per Lem. $DM \times ML = MD \times DN = AI \times IK$;
Ergo $HF \times FG = BE \times EC$.
Quod erat &c.



PROPOSITIO LVIII.



130. *Parabolam* ABC *secent duæ quævis diametri* BD, EF, *quas in* D *&* F *secent quæcunque parallelæ* AC, GH; *Dico*,

$$BD : EF :: AD \times DC : GF \times FH.$$

Demonstratio. Secetur recta EF, vel producatur in K; & fiat $EK = BD$; & per K ponatur LM, parallela ipsi GH. Itaque (*n.* 126.)

$EK : EF :: LK \times KM : GF \times FH$.

Quia vero $EK = BD$, erit per præced.,

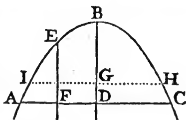
$LK \times KM = AD \times DC$;

Quare $BD : EF :: AD \times DC : GF \times FH$. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

131. *Sint iterum in parabola* ABC *duæ quævis diametri* BD, EF, *quas in* F & D *secet recta quævis* AC; *Dico*, AD×DC:AF×FC::BD:EF.



Demonstratio. Fiat EF=BG; & per G ducatur IH, parallela ipsi AC. Erit igitur (*n.* 126.)

BG : BD :: IG×GH:AD×DC.

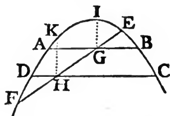
Atqui (*n.* 129.) IG×GH=AF×FC;

Ergo EF : BD :: AF×FC:AD×DC.

Quod erat &c.

PROPOSITIO LX.

132. *Parabolam* ABC *secent duæ quævis parallelæ* AB, CD, *quas utcunque in* G & H *dividat linea* FE; *Dico*,



AG×GB:DH×HC::FG×GE:FH×HE.

Demonstratio. Ex punctis H & G excitentur diametri HK, GI. Erit igitur (*n.* 130.)

GI:HK::AG×GB:DH×HC.

Atqui (*n.* 131.) GI:HK::FG×GE:FH×HE;

Ergo AG×GB:DH×HC::FG×GE:FH×HE.

Quod erat &c.

PROPOSITIO LXI.

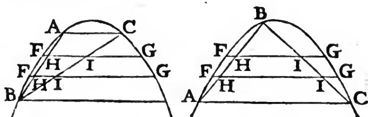
133. *Parabolæ* ABC *inſcriptum ſit triangulum* ABC, *cujus duo latera* AB, CB *ſecentur in* H *&* I *utcunque a duabus quibuſvis* FG, FG, *parallelis ipſi* AC; *Dico*,

FH×HG:FH×HG::FI×IG:FI×IG.

Demonſtratio. Nam per præced., rectangulum FHG ad rectangulum FHG eſt, ut AHB rectangulum ad rectangulum AHB. Et ſimiliter rectangulum FIG eſt ad rectangulum FIG, ut rectangulum CIB ad rectangulum CIB. Eſt autem

AH×HB:AH×HB::CI×IB:CI×IB;

quia ex iiſdem rationibus componuntur;
Ergo FH×HG:FH×HG::FI×IG:FI×IG.
Quod erat &c.



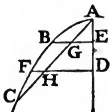
PROPOSITIO LXII.

134. *Eſto parabolæ* ABC *diameter* AD, *quam in* E *&* D *ſecent ordinatæ* BE, FD; *ducaturque ex* A *recta* AC, *ſecans ordinatas, utcunque in* G *&* H; *Dico, rectangulum* BE×EG *ad rectangulum* FD×DH *triplicatam habere rationem ejus, quam habet* BE *ad* FD.

Demonſtratio. Rectangulum BE×EG ad rectangulum FD×DH rationem habet compoſitam

ex

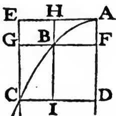
ex BE ad FD, & EG ad DH, ideſt, AE ad AD. Sed ratio AE ad AD duplicata eſt rationis BE ad FD, ex natura parabolæ; Ergo rectangulum BE × EG ad rectangulum FD × DH triplicatam habet rationem ejus, quam habet BE ad FD. Quod erat &c.



PROPOSITIO LXIII.

135. *Parabolam* ABC, *cujus diameter* AD, *&* *ordinata* CD, *tangat in* A *recta* AE, *quam in* E *ſecet diameter* CE; *&* *ex quovis perimetri puncto* B *ducatur ordinata* FG, *utrinque occurrens in* F *&* G *rectis* AD, EC; *denique per* B *ducatur diameter* HI, *occurrens ordinatæ, &* *tangenti in* I *&* H; *Dico, parallelogramma* AB, AG, AI, AC *in continua eſſe analogia.*

Demonſtratio. Quoniam AE, FG ſunt parallelæ, parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG eſt, ut FB ad FG, ideſt, CD. Eſt autem parallelogrammum AB ad parallelogrammum AI, ut recta AF ad rectam AD, hoc eſt, ex natura parabolæ, in duplicata ratione FB ad DC; Ergo parallelogrammum AB ad parallelogrammum AI duplicatam habet rationem ejus, quam habet parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG; parallelogramma igitur AB, AG, AI ſunt continue proportionalia.



Rurſum parallelogrammum AI eſt ad parallelogrammum AC, ut recta DI ad rectam DC, hoc eſt, ut parallelogrammum AB ad parallelogrammum AG; Ergo parallelogramma AB, AG, AI, AC &c.

De Parabolæ Segmentis, & Figuris maximis eidem inſcriptis.

SYNOPSIS.

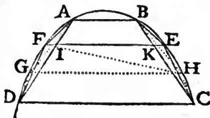
AUferre ſegmentum parabolæ, dato æquale, vel ad datum ſegmentum in data ratione parametri ad parametrum. Segmentum parabolæ conſtruere, æquale ſegmento dato alterius. Ab eadem parabola auferre tria ſegmenta æqualia; vel auferre ſegmenta, quæ ſint in triplicata ratione ſubtenſarum; & ſimiliter ſegmenta continue proportionalia. Datæ parabolæ terminatæ maximum inſcribere parallelogrammum, vel polygonum regulare maximum, quod dato laterum numero conſtet.

LEMMA.

136. *SI parabolam* ABC *interſecent duæ quævis parallelæ* AB, DC, *junctiſque* BC, AD, *inſcribatur ſegmento* CB *triangulum maximum* BEC, uti docuimus n. 109., *ducaturque* EF *parallela ipſi* AB, *& jungantur* AF, FD; *Dico, triangulum* AFD *maximum eſſe illorum, quæ ſegmento* AFD *inſcribi poſſint.*

Et reciproce, *ſi triangula* AFD, BEC *fuerint maxima; Dico, rectam* EF *parallelam fore ipſi* AB.

Demonſt. Quoniam AB, FE, DC ſunt invicem parallelæ, erit FI$=$KE (*n. 61.*); ac proinde duo triangula FAI, FID æqualia ſunt duobus triangulis KBE, KEC, ſingula ſingulis. Itaque, ſi triangulum AFD non ſit omnium maximum, eſto, ſi fieri poſſit, aliud AGD majus triangulo AFD; poſitàque GH, parallelà ipſi AB, jungantur rectæ BH, HC. Demonſtrabitur, ut prius,



trian-

triangulum BHC æquari triangulo AGD. Sed AGD majus eſt triangulo AFD=BEC, ut oſtenſum eſt; Triangulum igitur BHC majus quoque eſt triangulo BEC: quod eſt contra hypotheſim. Quamobrem triangulum AGD maximum non eſt; ſed omnium maximum eſt triangulum AFD. Quod erat primum.

Et reciproce, ſi triangula AFD, BEC fuerint maxima; Dico, junctam rectam FE eſſe parallelam rectæ AB. Eſto enim, ſi fieri poſſit, quævis alia FH parallela ipſi AB, junganturque BH, HC. Triangulum igitur BHC maximum eſt eorum, quæ ſegmento BEC inſcribi poſſunt, adeoque majus triangulo BEC; quod eſt abſurdum; Ergo FH non eſt parallela rectæ AB; ſed FE æquidiſtat eidem AB. Quod erat alterum.

Quod ſi AB contingat parabolam, eadem inferri poſſunt, quæ prius, eademque eſt demonſtratio.

PROPOSITIO LXIV.

137. *SI parabolam* ABC *ſecent parallelæ quævis duæ* AB, DC, *ducanturque rectæ* AD, BC; *Dico, ab hiſce rectis ſegmenta auferri æqualia.*

Demonſtratio. Segmentis AD, BC triangula inſcribantur maxima AFD, BEC (*n.* 109.); quæ æqualia ſunt inter ſe, propter parallelas AB, CD, per Lemma; Ergo etiam ſegmenta æquantur (*n.* 118.).

PROPOSITIO LXV.

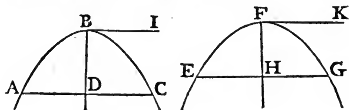
138. *EX dato in perimetro parabolæ puncto* B *rectam ducere, quæ ſegmentum auferat æquale dato* AD.

Reſolutio & Demonſt. Jungatur AB; ducaturque CD, parallela ipſi AB. Ex præcedente jam conſtat, rectam BC, ex dato puncto eductam, ſegmentum auferre æquale dato AD.

PROPOSITIO LXVI.

139. *AD axem* BD *parabolæ* ABC, *cujus parameter sit* BI, *esto ordinatim applicata* AC; *sit autem & altera parabola* EFG, *cujus axis* FH, *& parameter* FK. *Oporteat ex hac parabola* EFG *segmentum auferre, quod ad segmentum* ABC *rationem habeat datam parametri* BI *ad parametrum* FK.

Resolutio & Demonstratio. Fiat, ut IB ad FK, ita reciproce FH ad BD; & per H applicetur ordinata EG: Dico factum. Cum enim sit IB:FK::FH:BD, erit $IB \times BD = FK \times FH$. Est autem $IB \times BD = \overline{AD}^2$, & $FK \times FH = \overline{EH}^2$; Quare AD = EH; hoc est, AC = EG; Ergo triangulum maximum segmenti EFG, ad triangulum maximum segmenti ABC est, ut FH ad BD, idest, per constr., ut BI ad FK; Quare (*n.* 118.) etiam segmentum EFG ad segmentum ABC, ut BI ad FK. Abstulimus igitur ex parabola EFG segmentum, quod ad segmentum ABC datam habet rationem parametri BI ad parametrum FK. Quod erat &c.

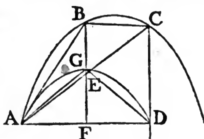


PRO-

PROPOSITIO LXVII.

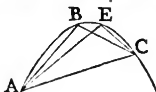
140. *AD parabolæ* ABC *diametrum* BE *esto ordinatim applicata* AC; *ductaque* AD *normali ad diametrum ex* C *demissam*, *fiat* BE = FG; *& per* AGD *parabola describatur*, *cujus axis* GF; *Dico*, *segmentum* AGD *æquari segmento* ABC.

Demonstratio. Quoniam BE = GF, triangula BCE, GDF, item BAE, GAF, ac propterea triangula ABC, AGD inter se sunt æqualia. Sed etiam maxima sunt illorum, quæ segmentis ABC, AGD inscribi possint (*n.* 109.); Ergo segmenta ABC, AGD sunt æqualia (*n.* 118.). Quod erat &c.

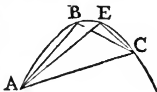


PROPOSITIO LXVIII.

141. *SI parabolæ segmento* ABC *intelligantur inscripta duo triangula*, *ita quidem*, *ut triangulum* ABC *sit maximum illorum*, *quæ segmento inscribi possunt*, *alterum vero* AEC *quodcunque*; *Dico*, *segmenta parabolæ* AE, EC *simul sumpta*, *majora esse segmentis* AB, BC *simul sumptis*.



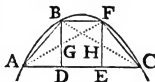
Demonstratio. Cum enim triangulum AEC minus sit triangulo ABC, residua segmenta AE, EC majora sunt residuis segmentis AB, BC. Eodem etenim excessu triangulum ABC superat triangulum AEC, quo excessu segmenta super lineis AE, EC superant segmenta super AB, BC. Quod &c.



PROPOSITIO LXIX.

142. P*Arabolam* ABC *subtendat recta* AC, *quæ divisa in quotvis partes æquales in punctis* D *&* E, *erigantur diametri* DB, EF; *junganturque* AB, BF, FC; *Dico, segmenta* AB, BF, FC *esse æqualia*.

Demonstratio. Ducantur AF, BC, quæ diametris occurrant in G & H. Jam vero, propter parallelas, AD:DE::AG:GF. Est autem per hyp., AD=DE; Ergo AG=GF. Quare (*n.* 109.) triangulum ABF maximum est eorum, quæ segmento ABF inscribi possint; & segmenta AB, BF sunt æqualia (*n.* 115.). Similiter ostenduntur æqualia segmenta BF, FC; Segmenta igitur AB, BF, FC sunt æqualia. Quod erat &c.



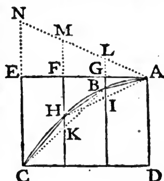
PROPOSITIO LXX.

143. P*Arabolam* ABC, *cujus diameter* AD, *contingat in* A *tangens* AE, *quæ dividatur in partes æquales, punctis* E, F, G; *demittanturque diametri*

metri EC, FH, GB, *occurrentes parabolæ in* B, H, C; *& jungantur* AB, BH, HC; *Dico, ſegmenta* AB, BH, HC *eſſe inter ſe æqualia.*

Demonſtratio. Ducantur ſimiliter ſubtenſæ AH, BC, occurrentes diametris in K & I. Quoniam IG, FH æquidiſtant, & AG, GF ponuntur æquales, rectæ AI, IH inter ſe quoque æquales erunt; Quare AH eſt ordinata ad diametrum IB; & triangulum ABH eſt maximum eorum, quæ ſegmento ABH inſcribi poſſint (*n.* 109.); adeoque & ſegmenta AB, BH æqualia ſunt (*n.* 115.).

Eodem modo oſtenduntur ſegmenta BH, HC inter ſe æquari; Ergo &c.



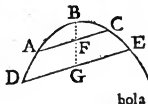
Corollarium.

144. PRopoſitio quoque vera eſt, ſi ex A ducta ſecans AN dividatur in partes æquales punctis L & M; ex quibus in parabolam demittantur rectæ LB, MH, NC, parallelæ diametro AD. Demonſtratio patet ex præced.

PROPOSITIO LXXI.

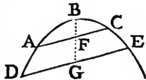
145. P*Arabolam* ABC *ſecent duæ quævis parallelæ* AC, DE; *Dico, ſegmentum* ABC *ad ſegmentum* DBE *eſſe in triplicata ratione rectæ* AC *ad rectam* DE.

Demonſt. Ponatur diameter BF, ad quam ordinatim poſitæ ſint AC, DE. Para-



bola

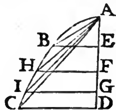
bola ABC ad parabolam DBE, eam habet rationem, quam triangulum ſub AC & BF, ad triangulum ſub DE & BG (*n.* 118.). Atqui ratio primi trianguli ad ſecundum, eſt triplicata rationis AC ad DE; quippe quæ compoſita eſt ex ratione AC ad DE, & BF ad BG; eſt autem ex natura parabolæ, ratio BF ad BG duplicata rationis AC ad DE; Ergo parabola ABC ad parabolam DBE eſt in triplicata ratione rectæ AC ad rectam DE. Quod erat &c.



PROPOSITIO LXXII.

146. *Parabolæ* ABC *diameter eſto* AD, *diviſa in punctis* E, F, G, *hac lege, ut abſciſſæ* AE, AF, AG, AD *ſint continue proportionales; poſitiſque ordinatis* EB, FH, GI, CD, *jungantur ſubtenſæ* AB, AH, AI, AC; *Dico, ſegmenta* AB, ABH, ABI, ABC *eſſe continue proportionalia.*

Demonſtratio. Ratio ſegmenti AB ad ſegmentum AH triplicata eſt ejus, quam habet ordinata BE ad ordinatam HF, per præced. Rurſum ABH ſegmentum ad ſegmentum ABI triplicatam habet rationem ejuſdem HF ad IG; & ſic de cæteris. Atqui BE, HF, IG, CD ſunt continue proportionales (*n.* 123.); quoniam AE, AF, AG, AD in continua ponuntur analogia; Igitur & ſegmenta AB, ABH, ABI, ABC ſunt in ratione continuata. Quod erat &c.



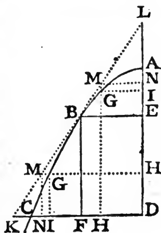
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

147. *SI ad parabolæ* ABC *diametrum* AD *applicetur ordinata* DC, *feceturque* AD *in* E, *ita ut* ED *dupla sit ipsius* AE, *tum ex* E *ducatur ordinata* EB, *&* *ex* B *demittatur diameter* BF, *occurrens rectæ* DC *in* F; *Dico*, *parallelogrammum* DEBF *maximum esse illorum*, *quæ in angulo* EBF *parabolæ* ABCD *terminatæ inscribi possint*.

Demonstratio. Inscribatur enim quodcunque aliud parallelogrammum IGHD, habens angulum IGH æqualem angulo EBF; agaturque per B tangens LK, occurrens diametro AD in L, & ordinatæ DC in K; rectæ vero HG occurrens in M, ex quo ducatur recta MN, parallela ipsi GI.

Quoniam BL tangens est, & BE ordinata, erit LA = AE; adeoque tota LE æqualis ipsi ED, quæ dupla ponitur rectæ AE; Quare LK in B quoque bifariam est divisa. Ergo ex Elementis, parallelogrammum DB majus est parallelogrammo DM, quod majus est parallelogrammo DG; quia punctum M cadit extra parabolam; hinc parallelogrammum DB multo majus est parallelogrammo DG. Idem demonstratur de quovis alio; Parallelogrammum igitur DB maximum est eorum &c.

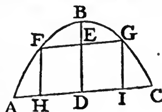


PRO-

PROPOSITIO LXXIV.

148. D*Atæ parabolæ* ABC, *terminatæ basi* AC, *maximum inscribere parallelogrammum*.

Resolutio & Demonstratio. Excitetur ex puncto medio D basis diameter BD, quæ dividatur in E, hac lege, ut ED dupla sit reliquæ EB; tum ducatur per E ordinata FG; & ex F & G diametri demittantur FH, GI, occurrentes ordinatæ AC in H & I. Manifestum est ex præced., parallelogrammum HFGI esse id, quod quæritur.



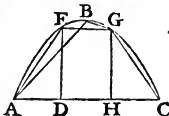
DEFINITIO.

149. P*Olygonum regulare voco, cujus singula latera auferunt segmenta æqualia, præter subtensam*.

PROPOSITIO LXXV.

150. D*Atæ parabolæ terminatæ* ABC, *quam subtendat* AC, *polygonum regulare inscribere, quod dato laterum numero constet, puta, quatuor*.

Resolutio & Demonst. Secetur AC in D & H trifariam; & ex D & H excitentur diametri DF, HG; junganturque AF, FG, GC; Dico, polygonum AFGC satisfacere Problemati. Cum enim rectæ AD, DH, HC



sint

sint æquales, segmenta quoque AF, FG, GC æqualia sunt; ut demonstratum est. Polygonum igitur regulare, est quadrilaterum, quod inscripsimus datæ parabolæ.

PROPOSITIO LXXVI.

151. I*Isdem positis, Dico, quadrilaterum* AFGC *esse maximum illorum, quæ parabolæ* ABC *terminatæ inscribi possunt.*

Demonstratio. Inscribatur enim aliud quodvis quadrilaterum ABGC, quod quidem latus CG commune habeat cum quadrilatero AFGC. Quoniam igitur segmenta AF, FG sunt æqualia, minora illa sunt segmentis AB, BG simul sumptis (*n.* 141.). Residua igitur figura rectilinea AFGC major est figurà rectilineà ABGC.

Similiter ostenditur, quadrilaterum quodvis aliud minus esse quadrilatero AFGC; Maximum igitur hoc est eorum, quæ ABC parabolæ terminatæ inscribi possunt.

Corollarium I.

152. QUæ de quadrilatero regulari dixi, eadem de quotvis laterum polygono regulari intelligenda sunt; eademque omnibus constructio, & demonstratio convenit.

Corollarium II.

153. ATque hinc, ut datæ parabolæ terminatæ polygonum inscribatur maximum eorum, quæ dato numero laterum inscribi possunt, satis erit polygonum regulare inscribere.

De-

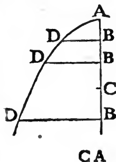
Descriptiones variæ, & Geneses Parabolæ.

SYNOPSIS.

Dato parametro, exhibere illius parabolam. Datis rectâ lineâ pro diametro futuræ parabolæ, ejusque vertice, & angulo, quem applicatæ efficere debeant, & parametro, parabolam per plura puncta describere. Circa datam parallelogrammi diametrum parabolam describere, cujus vertex sit in dato angulo. Dato vertice parabolæ, vel diametro, vel axe, ejusque parametro, aliter atque aliter parabolam construere, & in infinitum producere. Circa datum triangulum parabolam, quæ transeat per datum punctum, aliasque in infinitum parabolas describere. Datis rectis se mutuo decussantibus, invenire parabolam, cujus una ex diametris sit alterutra rectarum. Datis tribus punctis, non in directum positis, parabolam describere, quæ transeat per eadem tria data puncta.

PROPOSITIO LXXVII.

154. SI *recta* AB *secetur utcunque in* C, *eidemque* AB *applicentur rectæ quotcunque* BD, BD *&c., hac lege, ut rectangulis* CA$\times$AB *æqualia sint quadrata* BD; *Dico, puncta* A, D, D *esse ad parabolam, cujus parameter, seu latus rectum est* AC.



Demonstratio. Ut abscissa AB ad alteram abscissam AB, ita rectangulum CA$\times$AB ad rectangulum CA$\times$AB, ex Elementis, propter communem altitudinem CA. Atqui rectangulis singulis

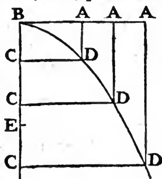
CA×AB, æqualia ponuntur quadrata ſingula BD; Igitur quadratum BD eſt ad quadratum BD, ut abſciſſa AB ad alteram abſciſſam AB. Quamobrem ex def. parabolæ, puncta A, D, D ſunt ad parabolam, cujus latus rectum eſt AC. Quod &c. Hinc

Problema. *Dato parametro, exhibere illius parabolam.*

PROPOSITIO LXXVIII.

155. *Sub angulo quocunque* ABC, *ſumatur in latere* BC *quodvis punctum* E; *ac fiant proportionales* EB, BA, AD, *ita ut rectæ ſingulæ* AD *æquidiſtent lateri* BC; *Dico, puncta* B, D, D *eſſe ad parabolam, cujus latus rectum eſt* BE.

Demonſtratio. Ducantur DC, DC, parallelæ rectis AB &c. Quoniam CD = AB, erunt rectæ EB, CD, BC in continua analogia; ac proinde rectangulis EB×BC æqualia quadrata CD; Ergo per præced., puncta B, D, D ſunt ad parabolam, cujus latus rectum eſt BE. Hinc



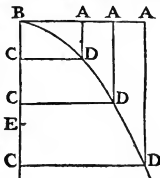
Problema. *A vertice dati anguli, intra ejuſdem latera parabolam deſcribere.*

PROPOSITIO LXXIX.

156. *Sit iterum angulus quicunque* ABC; *& lateri* BC *quotcunque intelligantur eductæ parallelæ* AD, *hac lege, ut* AB *quadratum ad* AB *quadratum ſit, ut recta* AD *ad rectam alteram* AD; *Dico*, B, D, D *eſſe ad parabolam.*

De-

Demonstratio. Ponantur iterum DC parallelæ ipsis AB. Erit igitur DC quadratum ad quadratum DC, ut recta AD ad rectam AD, hoc est, ut BC ad BC; Quare per præced., puncta B, D, D sunt ad parabolam. Hinc

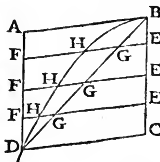


Problema. *Datis rectâ lineâ pro diametro futuræ parabolæ, ejusque vertice, & angulo, quem applicatæ efficere debeant, & parametro, discimus parabolam per plura puncta describere;* uti etiam constabit ex sequentibus.

PROPOSITIO LXXX.

157. E*Sto* ABCD *parallelogrammi diameter* BD, *quam in* G *secent lineæ quotcunque* EF, *parallelæ lateri* AB, *hac lege, ut* FE, HE, GE *sint continue proportionales; Dico*, B, H, H *puncta esse ad parabolam.*

Demonstratio. Quoniam omnes rectæ FE æquales sunt, erit rectangulum FE×EG ad alterum FE×EG, ut recta GE ad alteram GE, sive, ut BE ad BE. Atqui rectangulis singulis FE×EG æqualia ponuntur quadrata HE; Ergo quadratum HE ad quadratum alterum HE est, ut abscissa EB ad abscissam EB; Quare puncta B, H, H sunt ad parabolam, ex def. Quod erat &c.



Pro-

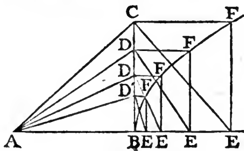
Problema. *Circa datam parallelogrammi diametrum parabolam describere, cujus vertex sit in dato angulo.*

PROPOSITIO LXXXI.

158. E*Sto* ABC *triangulum rectangulum; ductisque ex puncto* A *lineis quotcunque* AD, *a punctis* D *excitentur rectæ* DE, DF; *hac quidem lege, ut rectæ* DE *sint normales ad rectam* AD, *occurrentes lateri* AB *producto, in* E; *& rectæ* DF *normales sint ad latus alterum* CB; *occurrant autem lineis* DF *in* F, *rectæ* EF, *parallelæ lateri* CB; *Dico*, B, F, F *esse ad parabolam, cujus latus rectum est* AB.

Demonstratio. Cum enim anguli ADE ponantur recti, & DB recta normalis ad A, rectangulis AB×BE æqualia sunt quadrata DB, hoc est, FE. Atqui rectangula AB×BE illam inter se servant proportionem, quam rectæ BE; Igitur, ut BE ad BE, sic quadratum EF ad quadratum EF. Igitur (*n.* 35.) puncta B, F, F sunt ad parabolam, cujus latus rectum AB. Quod erat &c.

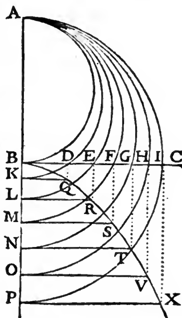
Problema. *Dato vertice* B *parabolæ, ejusque parametro* AB, *parabolam describere.*



PROPOSITIO LXXXII.

159. *SI ad rectam* AB *describantur quotcunque circuli, sese contingentes in eodem puncto* A, *& quorum diametri sint* AB, AK, AL, AM *&c., ducaturque ex* B *recta* BC, *quæ tangat circulum minimum in* B, *reliquosque secet in punctis* D, E, F, G, H, I; *fiant autem lineis* BD, BE, BF, BG *&c. æquales rectæ* KQ, LR, MS, NT *&c., quæ circulos tangant in* K, L, M, N *&c.; Dico, puncta* B, Q, R, S *&c. esse ad parabolam, cujus parameter est* AB.

Demonstratio. Quoniam BD normalis est ad communem diametrum, erit ex Elem., $\overline{BD}^2:\overline{BE}^2::AB\times BK:AB\times BL::BK:BL$. Est autem per constr., $BD=KQ$; & $BE=LR$; Itaque $\overline{KQ}^2:\overline{LR}^2::BK:BL$; atque ita porro de reliquis. Puncta igitur B, Q, R, S &c. sunt ad parabolam. Constans vero recta AB est ejusdem parameter; cum semper quadrata ordinatarum æqualia sint rectangulis $KB\times BA$, $LB\times BA$ &c. Quod erat &c.



Problema. *Datâ rectâ lineâ* BP *pro axe futuræ parabolæ, dataque parametro* AB, *parabolam describere*.

Co-

Corollarium I.

160. P*Arabolam continuare, & in infinitum producere*. Cum enim in infinitum multiplicari possint circuli illi tangentes, & normalis BC protendi utique in infinitum, poterit similiter continuari praxis, qua nuper parabolam produximus.

Corollarium II.

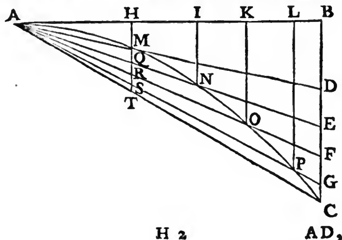
161. S*I fiat* DQ:ER::$\overline{BD}^2$:$\overline{BE}^2$, *puncta* Q & R *pertinebunt ad parabolam*. Nam DQ=BK, & ER=BL; BD=KQ, & BE=LR.

Scholion.

I*N constructione Theorematis, quo plures, & crebriores erunt circuli, eo exactius describetur parabola.*

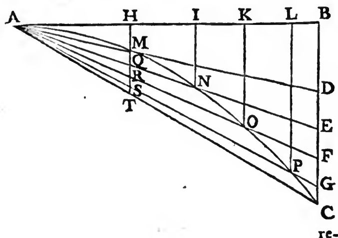
PROPOSITIO LXXXIII.

162. E*Sto* ABC *trianguli latus* BC, *utcunque divisum in punctis* D, E, F, G; *junctisque*



AD, AE, AF, AG, *dividatur similiter latus alterum* AB *in totidem partes, prioribus proportionales, in punctis* H, I, K, L; *ex quibus demittantur rectæ* HM, IN, KO, LP, *parallelæ lateri* BC, *quæ occurrant rectis* AD, AE, AF, AG *in* M, N, O, P; *Dico, puncta* A, M, N, O, P, C *esse ad parabolam*.

Demonstratio. Recta HM occurrat lineis AD, AE, AF, AG in punctis Q, R, S, T. Quoniam ex hyp., AH:AI::BD:BE; sit autem BD:BE:: HM:HQ::AH:AI::HQ:IN; Ergo continue proportionales sunt HM, HQ, IN. Similiter ostenduntur continue proportionales HM, HR, KO; item HM, HS, LP; ac denique HM, HT, BC. Ergo rectangula $HM \times IN$, $HM \times KO$, $HM \times LP$ &c. illam inter se proportionem habent, quam $\overline{HQ}^2$, $\overline{HR}^2$, $\overline{HS}^2$. Atqui $\overline{HQ}^2 : \overline{HR}^2 :: \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2$; hoc est, per hyp., $:: \overline{AI}^2 : \overline{AK}^2$; & $\overline{HR}^2 : \overline{HS}^2 :: \overline{BF}^2 : \overline{BG}^2 :: \overline{AK}^2 : \overline{AL}^2$; Ergo $HM \times IN : HN \times KO : HM \times LP :: \overline{AI}^2 : \overline{AK}^2 : \overline{AL}^2$. Atqui eadem rectangula sunt, ut



re-

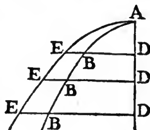
rectæ IN, KO, LP; Igitur $\overline{AI}^2 : \overline{AK}^2 : \overline{AL}^2$ :: IN, KO, LP; Quare A, M, N, O, P sunt ad parabolam. Quod erat &c.

Problema. *Circa propositum triangulum* A B C *parabolam describere, cujus vertex sit* A, *&* *transeat per* C.

PROPOSITIO LXXXIV.

163. *Datæ parabolæ* AB *diameter esto* AD, *&* *ordinatim ad illam applicatæ* DB; *fiat autem*, DB:DB::DE:DE: *Dico, puncta* A, E, E *esse ad parabolam*.

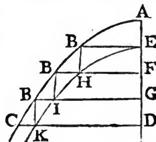
Demonstratio. Est enim per hyp., $\overline{DE}^2 : \overline{DE}^2$ :: $\overline{DB}^2 : \overline{DB}^2$, hoc est, ut abscissa AD ad abscissam AD; Quare puncta E, E sunt ad parabolam. Quod erat &c.



Problema. *Circa datam parabolam ab eodem vertice alias in infinitum describere*.

PROPOSITIO LXXXV.

164. *Datæ parabolæ* ABC *diameter esto* AD, *divisa in partes æquales, in punctis* E, F, G, D; *ductisque ordinatim lineis* EB, FB, GB, DC, *demittantur ex punctis* B *diametri* BH, BI, BK, *concurrentes cum ordinatis in* H, I, K; *Dico, puncta* E, H, I, K *esse ad parabolam*.



 De-

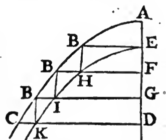
Demonstratio. Quoniam diametri partes AE, EF, FG &c. ponuntur æquales, erit

$$EF:EG::AE:AF::\overline{EB}^2:\overline{FB}^2::\overline{FH}^2:\overline{GI}^2;$$

Ergo $EF:EG::\overline{FH}^2:\overline{GI}^2$.
Eodem modo demonstratur,

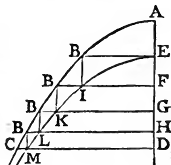
$$EG:ED::\overline{GI}^2:\overline{DK}^2;$$

Puncta igitur E, H, I, K sunt ad parabolam. Quod erat &c.



PROPOSITIO LXXXVI.

165. *Datæ parabolæ* ABC *diameter esto* AD, *divisa in punctis* E, F, G, H, D, *hac lege, ut* AE, EF, FG, GH *&c. sint continue proportionales; ducantur autem ordinatim applicatæ* EB, FB, GB *&c.; & ex punctis* B *demittantur diametri convenientes cum ordinatis; Dico, puncta occursuum* E, I, K *&c. esse ad eamdem parabolam.*



Demonstratio. Quoniam AE, EF, FG &c. sunt continue proportionales, erit

$$EF:EG::AE:AF::\overline{EB}^2:\overline{FB}^2::\overline{FI}^2:\overline{GK}^2;$$

Ergo $$EF:EG::\overline{FI}^2:\overline{GK}^2.$$

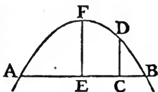
Similiter ostenditur, $\overline{FI}^2:\overline{HL}^2::EF:EH$;
Puncta igitur &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVII.

166. D*Atis rectis* AB, CD, *se mutuo decussantibus, invenire parabolam, cujus diameter sit data* CD.

Divisà AB bifariam in E, ducatur EF parallela datæ CD; fiatque, ut rectangulum AEB ad rectangulum ACB, sic recta EF ad rectam DC; Dico, puncta A, F, D, B esse ad parabolam quæsitam, cujus diameter est DC.

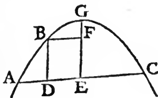


Demonstratio patet ex conversa Prop. LVIII. n. 131.

PROPOSITIO LXXXVIII.

167. D*Atis tribus punctis* A, B, C, *non in directum positis, & rectà* BD, *quæ per aliquod ex datis punctis transeat, parabolam describere per puncta* A, B, C, *cujus aliqua diameter sit* BD.

Jungatur AC, quæ secetur bifariam in E; ponaturque EF parallela ipsi BD, & BF parallela rectæ AC; fiat autem, ut quadratum AE ad quadratum BF, sic recta EG ad rectam FG; describaturque per B, G, C parabola, cujus diameter sit BD. Constat ex definitione parabolæ, illam quoque transire per A; Datis itaque tribus punctis &c.



De Parabolis similibus, parallelis, æqualibus, asymptotis, & superiorum generum.

SYNOPSIS.

Datà parabolà, describere parabolam alteram ipsi similem, super data basi. Omnes parabolæ sunt inter se similes; similesque figuræ rectilineæ ipsis inscribi possunt. Similia pariter sunt duo parabolarum segmenta, quorum bases sint proportionales suis diametris interceptis. Parabolæ similes sunt inter se, uti quadrata suarum diametrorum, seu altitudinum, seu parametrorum, seu laterum homologorum figurarum, quæ parabolis sint inscriptæ. Datà parabolà, construere super æqualem basem parabolam alteram, quæ sit in data ratione. Parabolæ, quarum bases, & altitudines sunt inæquales, habent rationem compositam basium, & altitudinum; & parabolæ æquales, quarum bases, & altitudines sunt inæquales, bases habent in ratione reciproca altitudinum. Quid sint parabolæ parallelæ, & asymptoticæ. Parabolæ æquales, in quibus parametri axium sunt æquales. Parabolæ æquales, seu asymptoti, in infinitum productæ, magis semper ad invicem accedunt; nusquam tamen concurrunt. Datæ parabolæ alteram æqualem describere. Quid sint parabolæ superiorum generum. Describere parabolam secundi generis, tertii &c. Invenire parametrum parabolarum superiorum generum.

De

De Similitudine Parabolarum.

DEFINITIO.

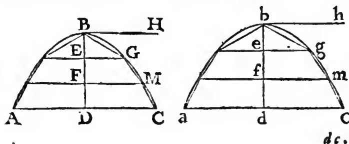
Superficies duæ curvilineæ dicuntur similes, quando similes figuræ rectilineæ in infinitum illis inscribi possunt. Itaque duæ parabolæ erunt similes, si ducta basi in utraque, figuræ rectilineæ eodem numero laterum ipsis inscriptæ, reperiantur similes.

PROPOSITIO LXXXIX.

168. *Datâ parabolâ* ABC, *super data pariter basi* ac, *describere parabolam alteram, ipsi similem.*

Basis *ac* secetur bifariam in *d*; tum fiat, uti DC ad *dc*, ita axis DB ad quartam proportionalem *db*; quam assumes pro altitudine parabolæ *abc* construendæ; hanc Dico fore similem parabolæ datæ ABC.

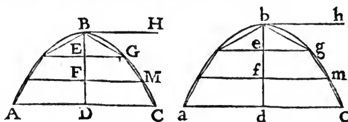
Demonstratio. Utriusque parabolæ parameter esto BH, *bb*. Itaque ex natura parabolæ, $\overline{DC}^2 = DB \times BH$; & $\overline{dc}^2 = db \times bb$. Atqui $\overline{DC}^2$ ad $\overline{dc}^2$ est in duplicata ratione ipsius DC ad *dc*; Ergo DB × BH ad *db* × *bb* est in ratione duplicata ejusdem DC ad



dc.

dc. Jam vero $DB \times BH$, $db \times bb$ sunt in ratione composita ex rationibus DB ad *db*, & BH ad *bb*; Ratio autem DB ad *db* est æqualis rationi DC ad *dc*, per constr.; Ergo ratio BH ad *bb* æqualis esse debet rationi DC ad *dc*; nam duæ hujuscemodi componentes rationes efficere debent rationem duplicatam ipsius DC ad *dc*; Ergo parameter BH est ad parametrum $bb::DC:dc::DB:db$.

His præjactis, si dividantur axes DB, *db* in eumdem numerum partium æqualium, puta, trifariam, ducanturque ordinatæ EG, FM, *eg*, *fm*, & chordæ BG, GM, MC, *bg*, *gm*, *mc*, reperietur pariter $EG:eg::EB:eb$, ac proinde triangula BEG, *beg* esse similia; & eadem de causa trapezoidem EFGM fore similem trapezoidi *efgm*, & trapezoidem FMDC similem trapezoidi *fmdc*, atque inde figuram inscriptam BGMCD similem figuræ inscriptæ *bgmcd*. Idem demonstrabis in altera parte utriusque parabolæ. Quamobrem ex def., duæ parabolæ erunt similes. Quod erat &c.



Corollarium I.

169. OMnes *parabolæ sunt inter se similes*. Nam semper determinari poterunt earum bases proportionales suis altitudinibus. Ergo &c.

Co-

Corollarium II.

170. SI *in parabolà* ABC *inſcripta fuerit figura quævis rectilinea* BGMCD, *etiam in altera ſimili parabola* abc *inſcribi ſemper poterit figura ſimilis* bgmcd. Nam ab omnibus angulis ejuſdem figuræ ductis ad axem ordinatis EG, FM, DC, nihil ſupererit aliud, quam dividere alterum axem in eadem proportione abſciſſarum BE, BF, BD, & ordinatas ducere *eg*, *fm*, *dc*, & chordas *bg*, *gm*, *mc*.

Corollarium III.

171. S*Imilia quoque ſunt duo parabolarum ſegmenta, quorum baſes ſint proportionales ſuis diametris, interceptis inter earum verticem, & baſim.* Nam hiſce ſegmentis inſcribi quoque poterunt figuræ ſimiles; quemadmodum in Coroll. II.

Corollarium IV.

172. P*Arabolæ ſimiles ſunt inter ſe, uti quadrata ſuarum baſium, ſeu altitudinum, ſeu parametrorum, ſeu laterum homologorum figurarum, quæ ipſis parabolis ſint inſcriptæ.* Omnes enim iſtiuſmodi lineæ eamdem ſervant inter ſe rationem. Idemque dicendum de ſegmentis ſimilibus.

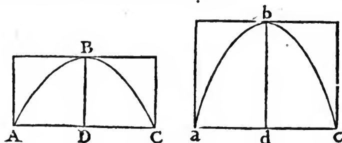
PRO-

PROPOSITIO XC.

173. D*Atà parabolà* ABC, *super æqualem basem* ac *construere parabolam alteram, quæ sit in data ratione.*

Parabola quæsita ad datam esse debeat, ut 3 ad 2. Ex puncto medio *d* basis *ac* excitetur perpendicularis *db*; divisoque bifariam axe DB, hujus semissis ter transferatur ex *d* in *b*; ac demum duabus rectis *dc*, *db* quæratur tertia proportionalis, quæ parameter erit quæsitæ parabolæ; quam facile construes ex præcedentibus.

Demonstratio. Parabola ABC æquatur duobus trientibus rectanguli circumscripti, uti & parabola *abc* (*n*. 115.). Atqui hæc duo rectangula circumscripta, cum habeant eamdem basem, sunt inter se, uti altitudines, nimirum, ut 2 ad 3; Ergo parabolæ sunt pariter inter se, ut 2 ad 3. Quod erat &c.



Corollarium.

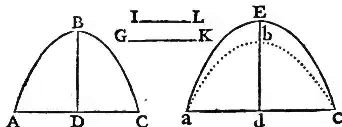
174. QUoniam parabolæ sunt inter se, uti rectangula circumscripta; hinc *Parabolæ, quæ bases æquales habent, sunt inter se, uti earum altitudines; & illæ, quarum altitudines sunt æquales, se habent, ut bases; illæ vero, quarum bases, & alti-*

altitudines sunt inæquales, habent inter se rationem compositam basium, & altitudinum; denique illæ, quæ, quamvis habeant bases, & altitudines inæquales, nihilo tamen minus sunt æquales, bases habent in ratione reciproca altitudinum.

PROPOSITIO XCI.

175. *Super basi* a c *parabolam construere, quæ sit ad datam parabolam* ABC, *uti recta* GK *ad rectam* IL.

Fiat, ut basis *ac* ad basim AC, ita reciproce altitudo DB ad quartam proportionalem *db*; quam assumes pro altitudine parabolæ *abc*; quæ, cum fuerit constructa, æquabitur datæ parabolæ ABC. Fiat subinde recta IL ad rectam GK, uti altitudo *db* ad quartam proportionalem *d*E; quam assumes pro altitudine parabolæ *a*E*c*; quæ, cum descripta fuerit, erit ad parabolam *abc*, sive ad parabolam ABC, uti GK ad IL. Nam hujusmodi duæ parabolæ, cum habeant basim communem *ac*, sunt inter se, uti earum altitudines *db*, *d*E.



De

De Parabolis parallelis, & asymptotis.

DEFINITIO.

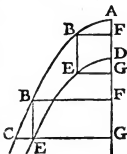
176. PArabolas parallelas *voco, quæ ad eumdem axem constitutæ, diversos quidem habent apices, sed æquales parametros, & concavas perimetros versus eamdem partem.*

Parabolæ æquales *sunt, in quibus parametri axium sunt æquales.*

PROPOSITIO XCII.

177. P*Arabolæ* ABC *axis esto* AD; *ejusque portioni* AD, *pro libito assumptæ, demittantur æquales diametri* BE, BE; *Dico, puncta* D, E, E *esse ad parabolam, æqualem parabolæ* ABC.

Demonstratio. Ductis ordinatis BF, BF, ponantur parallelæ EG, EG. Quoniam AD = BE = FG, dempta, vel addita communi FD, fiet AF = DG; Quare $DG:DG::AF:AF::\overline{FB}^2:\overline{FB}^2::\overline{GE}^2:\overline{GE}^2$; Puncta igitur D, E, E sunt ad parabolam.



Quia vero tam abscissæ AF, DG, quam ordinatæ FB, GE inter se æquales sunt, adeoque $\overline{FB}^2 = \overline{GE}^2$, erunt quoque æquales parametri axium; Unde, per def., parabolæ dicuntur æquales. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

178. *Iisdem positis, Dico, parabolas illas nusquam concurrere.*

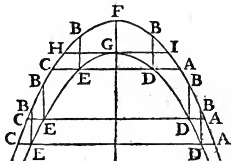
Demonstratio. In parabola DEE ad axem DG ponatur ordinata GE, occurrens alteri parabolæ ABC in puncto C. Quoniam latera recta utriusque parabolæ sunt æqualia, & abscissa DG a vertice D, minor est abscisså AG a vertice A; rectangulum quoque sub DG, & latere illius recto, minus est rectangulo sub AG, & latere recto; Ergo & EG quadratum minus est quadrato CG; & punctum C est in perimetro parabolæ ABC. Idem cum de omnibus punctis ejusdem parabolæ ostendi possit, patet, sectiones illas nusquam convenire. Quod &c.

DEFINITIO.

Parabolas asymptoticas, *seu* asymptotos *voco, quæ in infinitum productæ, magis semper ad invicem accedunt, nusquam tamen occurrunt.*

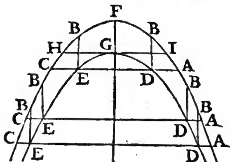
PROPOSITIO XCIV.

179. *Esto parabolæ* ABC *axis* FG, *&* *ordinatim ad illum applicata* HGI, *cui parallelæ ducantur* CA, CA; *&* *quadrato* HG *æqualia fiant rectangula* CEA, CDA; *Dico, puncta* E, G, D *esse ad parabolam, æqualem parabolæ* ABC.



De-

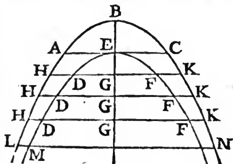
Demonstratio. Erigantur ex D & E diametri EB, DB. Quoniam quadrato HG, sive rectangulo HGI æqualia sunt rectangula CEA, vel CDA, diametri quoque FG, BE, BD æquales sunt (*n.* 131.); Quare (*n.* 177.) puncta E, G, D sunt ad parabolam, æqualem parabolæ, ABC. Quod erat &c.



PROPOSITIO XCV.

180. *Iisdem positis, Dico, parabolas illas in infinitum productas, magis semper in infinitum accedere, nusquam tamen concurrere.*

Demonstratio. Cum enim, per præcedentem, æquales sint parabolæ ABC, DEF, parametri quoque illarum æquales erunt (*n.* 176.); Ergo in infinitum productæ, nusquam concurrent (*n.* 178.). Quod vero magis semper ad invicem accedant, sic demonstro. In parabola ABC, diametro BG applicentur ordinatæ HK, LN; & LN remotior quidem a vertice B, quàm HK. Igitur æqualia sunt rectangula HDK, LMN, per hyp.; Quare HD : LM :: MN : DK. Atqui MN > DK; quia LN, utpote remo-



tior

tior a vertice B, major eſt HK; Recta igitur HD quoque major eſt ipsà LM. Similiter, ſi remotior quævis a vertice B parallela aſſumatur, oſtendetur LM majorem eſſe quavis ſibi æquidiſtante, infra ſe poſità; Magis igitur ſemper ad invicem accedunt parabolæ ABC, DEF; Quare aſymptoticæ ſunt ex def. n. 178.

PROPOSITIO XCVI.

181. D*Atæ parabolæ* ABC *parallelam, ſeu aſymptoticam deſcribere.*

Reſol. Ducatur diameter BE, cui ordinatim applicetur AEC; ductæque eidem AEC parallelæ HK ita ſecentur in D & F, ut rectangula HDK, HFK ſint æqualia quadrato AE. Conſtat ex nuper demonſtratis, puncta D, E, F eſſe ad parabolam parallelam, ſive aſymptoticam parabolæ ABC.

De Parabolis ſuperiorum generum.

HActenus proprietates parabolæ perſecuti fuimus, quam alii vocant *quadraticam*, ex proportione, quam obtinent ordinatarum quadrata ad abſciſſas; alii eamdem vocant *conicam*; quippe ad coni ſectionem refertur; alii denique parabolam *primi generis* vocant, ut eamdem diſcriminent ab aliis parabolarum ſpeciebus, quæ ſolent appellari ſecundi generis, tertii, quarti, atque ita porro in infinitum.

Parabolæ *ſecundi generis* dicuntur illæ, in quibus cubi ordinatarum ſunt, uti reſpondentes abſciſſæ.

Parabolæ *tertii generis* ſunt illæ, in quibus quadrato-quadrata ordinatarum ſe habent, uti abſciſſæ. Hæc eadem progreſſio ad altiorum graduum poteſtates traduci poteſt ſine ullo limite.

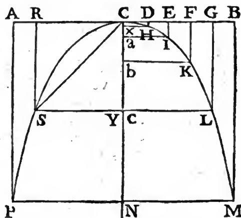
Scholion.

Quamvis iſtiuſmodi parabolæ nibil ferme ad praxim conferant, tamen propter connexionem, quam habent cum analyſi, & aritbmetica infinitorum, earum geneſim breviter perſtringam.

PROPOSITIO XCVII.

182. *Deſcribere parabolam ſecundi generis, tertii &c.*

Reſol. Si deſcribenda ſit parabola cubica, ducatur recta AB, quæ bifariam ſecetur in C, ex quo excitetur perpendicularis indefinita CN; tum ſemiſſis CB dividatur in partes æquales CD, DE, EF &c. in punctis D, E, F &c.; & excitentur perpendiculares DH, EI, FK, GL &c., quæ inter ſe habeant eamdem proportionem, quam habent cubi 1, 8, 27, 64, 125 &c. numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 &c.; denique



nique per extremitates H, I, K, L describatur curva C H I K L M; eademque constructio traducatur ad alteram partem C A; Dico, hanc curvam fore parabolam secundi generis, seu cubicam.

Demonstratio. Nam ductæ ordinatæ H x, I a, K b, L c, M N inter se erunt, ut rectæ C D, C E, C F &c., hoc est, ut numeri 1, 2, 3, 4; abscissæ autem C x, C a, C b, C c erunt, ut cubi eorumdem numerorum; quippe quæ æquantur rectis D H, E I, F K &c., singulæ singulis, propter parallelas; Ergo cubi ordinatarum erunt, ut abscissæ; & proinde &c.

Simili methodo operaberis, si describere velis parabolam tertii generis, quarti &c.

PROPOSITIO XCVIII.

183. *Invenire parametrum parabolarum secundi generis, tertii &c.*

Resolutio. In vertice C fiat angulus R C S graduum 45; & per S, ubi latus C S secat parabolam, ducatur S R parallela axi, & ordinata S Y. Perspicuum est, figuram S R C Y esse quadratum perfectum; Ergo cubus S Y æquatur cubo C Y.

Jam vero in parabola Apolloniana quadratum ordinatæ æquatur rectangulo suæ abscissæ in suam parametrum. Similiter in parabola cubica cubus ordinatæ S Y æqualis esse debet solido suæ abscissæ in suam parametrum, quam esse oportet planum; hoc autem solidum æquari necesse est cubo S Y, uti ostensum est; Ergo hoc solidum nequit esse aliud, quam productum ipsius C Y in suum quadratum $\overline{CY}^2$; & consequenter $\overline{CY}^2$ erit parameter parabolæ cubicæ.

Sin autem parabola sit tertii generis, tunc parameter erit potestas tertia ejusdem C Y. Nam quarta potestas ordinatæ S Y æquatur quartæ potestati ejusdem C Y; aliunde quarta potestas ordinatæ S Y æquatur facto C Y in parametrum. Ac simili methodo parametrum invenies parabolarum altiorum.

SECTIONUM
CONICARUM
PARS II.
DE ELLIPSI.



SECTIONUM CONICARUM

PARS II.

De Ellipsi absolute considerata.

SYNOPSIS.



Efinitio *ellipseos, nullo habito ad conum respectu. Quid intersit circulum inter & ellipsim; hinc in ellipsi axis unus altero major. Ratio ordinatarum in ellipsi ad ordinatas in circulo, circa eumdem axem descripto; ac proinde tota ellipsis ad circulum descriptum circa majorem axem, vel circa minorem axem, est, in primo casu, ut minor axis ad majorem, in secundo casu, ut major axis ad minorem. Ordinatæ æqualiter a verticibus axis dissitæ, sunt æquales. Super data quavis re-*

cta, vel super datis duabus rectis inæqualibus ellipsim per plura puncta describere.

QUemadmodum nuper parabolam, sic jam ellipsim, suo charactere insignitam, ac primaria proprietate distinctam, liceat suo cono eximere, atque absolute quidem, & universaliter contemplari, perinde ac si nullam omnino ad conum relationem haberet; uti nec circulus (quæ quidem una est species ellipseos) censeri solet habere.

DEFINITIO.

184. ELlipsim *igitur appello eam sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam, ejusmodi curvà terminatam, cujus ordinatim applicatarum ad axem quadrata eamdem rationem habent, ac rectangula sub segmentis axis contenta.*

AXem, segmenta axis, ordinatim applicatas ad axem, abscissas, eodem sensu hic accipio, quo supra iisdem vocibus usus sum.

Proportio autem rectangulorum, quæ a segmentis axis ellipseos constituuntur, ad quadrata ordinatarum ad eumdem axem, est illa quidem proprietas primaria ellipseos; uti jam demonstratum est in sectione coni. Verum, quia hæc proportio ita ellipsi inest, ut etiam circulo, quocum affinitatem maximam habet, suo modo conveniat; operæ pretium me facturum existimavi, si, *quid intersit circulum inter & ellipsim*, paucis exponerem.

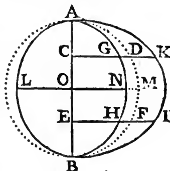
185. Esto circuli ADFB diameter AB, & ordinatim applicata CD; quæ necessario debet esse normalis ad diametrum circuli; neque enim in circulo, quæ perpendicularis non est, potest esse ordinatim applicata; quia nempe utrinque producta non

potest

potest bifariam dividi, nisi quæ perpendicularis est ipsi diametro. Certum est autem ex Elementis, normalem CD esse mediam proportionalem inter segmenta diametri, AC & CB; atque adeo quadratum ordinatæ CD æquari rectangulo AC×CB. Pariter quadratum ordinatæ EF æquatur rectangulo AE ×EB; atque ita de reliquis omnibus ordinatis ad diametrum circuli. Quamobrem *quadrata ordinatarum inter se in circulo, erunt, uti eadem rectangula.*

186. Esto jam ellipseos AGHB, vel AKIB diameter eadem AB, tanquam axis, sive major, sive minor, cui intelligantur ordinatim applicatæ CG, vel CK; & EH, vel EI. Volo igitur, ut in ellipsi quadrata ordinatarum proportionalia quidem sint rectangulis sub segmentis axis, sed illis non sint æqualia, verum aut majora, aut minora; puta, si quadratum CG sit ad quadratum EH, uti rectangulum AC×CB ad rectangulum AE×EB; ita tamen, ut quadrata non sint æqualia rectangulis, singula singulis; hanc figuram voco *Ellipsim*.

Quare in circulo proportio rectangulorum sub segmentis diametri ad quadrata ordinatarum, est proportio æqualitatis; in ellipsi vero est proportio inæqualitatis.



Ut autem ellipsim definirem, tanquam diversam a circulo, apposui in definitione: *ordinatim applicatarum ad axem quadrata &c.* Quia, ut suo loco demonstrabitur, contingit in ellipsi, ut certæ duæ diametri, quas conjugatas vocant, sint æquales; & in hoc casu quadrata ordina-

tarum

tarum ſunt æqualia ſuis reſpective rectangulis; ſed illæ diametri obliquæ ſunt ad invicem.

Corollarium I.

187. EX quo ſequitur, *in ellipſi axem unum altero majorem eſſe*. Nam, ſi in ellipſi axes eſſent æquales, jam non differret ellipſis a circulo; & rectangula ſub ſegmentis axis æqualia eſſent quadratis ordinatarum.

Corollarium II.

188. *IN ellipſi ordinatim applicatæ ad axem, habent eamdem rationem ad ordinatim applicatas ad diametrum circuli, circa eumdem axem deſcripti, ſibi reſpondentes.*

Nam per def., $\overline{CG}^2 : \overline{EH}^2 :: AC \times CB : AE \times EB$.

Sed ex nat. circuli, $AC \times CB = \overline{CD}^2$;

& $AE \times EB = \overline{EF}^2$;

Ergo $\overline{CG}^2 : \overline{EH}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{EF}^2$;

& alternando, $\overline{CG}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EH}^2 : \overline{EF}^2$;

atque hinc $CG : CD :: EH : EF$.

Corollarium III.

PErſpicuum eſt, ita eſſe $CG : GD :: EH : HF$, dividendo ſcilicet.

Corollarium IV.

189. *ITa eſt tota ellipſis ad circulum deſcriptum circa majorem axem, ut minor axis ad majorem.*

Nam

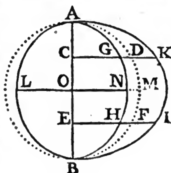
Nam per methodum indivisibilium, seu evanescentium, seu infinite parvorum, quam fuse exposui in fine Tomi II. Geom. elem., ductis omnibus ordinatis ad axem majorem, cum sit CG:CD::EH:EF::ON:OM=OA; ita erunt omnes ordinatæ ellipseos, seu ipsa ellipsis, ad omnes ordinatas circuli, seu ad circulum, ut ON ad OM, seu OA; hoc est, ut dupla LN ad duplam AB, seu minor axis LN ad majorem AB.

Eodem modo, si describatur circulus circa minorem axem, *ita erit ellipsis ad eum circulum, ut major axis ad minorem.*

Corollarium V.

190. O*Rdinatæ* CG, EH, *vel* CK, EI, *æqualiter a verticibus distitæ, æquales sunt.*

Nam, si AC=BE, erunt rectangula AC×CB, BE×EA æqualia inter se; ac proinde quadrata CG, EH, vel CK, EI, quæ eodem modo se habent, ac eadem rectangula, etiam ipsa erunt inter se æqualia; Ergo ordinatæ CG, EH, vel CK, EI æquales sunt.

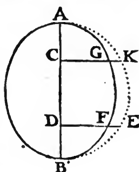


PRO-

PROPOSITIO I.

191. *SUper data quavis recta* AB, *tanquam axe, vel majore, vel minore, ellipsim per plura puncta describere.*

Resol. Esto enim ellipsis describendæ axis AB, super quo describatur semicirculus AKEB; tum divisà AB in quotcunque partes, sive æquales, sive inæquales, in C & D &c., excitentur perpendiculares DE, CK, quæ similiter dividantur in punctis F & G; hoc est, DF : DE :: CG : CK; Dico, puncta A, G, F, B pertinere ad eamdem ellipsim.



Dem. Nam ex nat. circuli, $\overline{DE}^2 = AD \times DB$;

& $\overline{CK}^2 = AC \times CB$.

Est autem per hyp., $DF : DE :: CG : CK$;

& consequenter $\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{CG}^2 : \overline{CK}^2$;

Ergo $\overline{DF}^2 : AD \times DB :: \overline{CG}^2 : AC \times CB$;

& permutando, *quadrata ordinatarum* DF, CG *sunt, ut rectangula sub segmentis axis contenta;* Itaque ex definitione ellipsis, puncta A, G, F, B in eadem ellipsi erunt. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

192. *SUper datis duabus rectis inæqualibus* AB, CD, *tanquam axibus, ellipsim per plura puncta describere.*

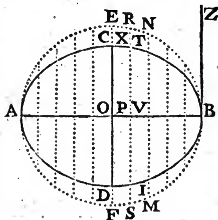
Resolutio. Accipiantur duæ rectæ inæquales AB, CD, quæ se mutuo bifariam, & perpendiculariter secent in O, a quo, tanquam centro, & intervallo OA, vel OB, describatur circulus AFBE; & diametro

metro AB ducantur perpendiculares SR, MN &c.

Quæratur insuper quarta proportionalis semidiametro OE, rectæ OC, & ordinatæ PR; ac transferatur hæc quarta proportionalis a puncto P ad X; Dico, punctum X fore ad ellipsim.

Quæratur rursum quarta proportionalis tribus rectis OE, OC, VN; & transferatur ab V in T; Dico, punctum T esse ad ellipsim.

Similiter quærantur semper totidem quartæ proportionales duabus rectis OE, OC, & cuilibet ex ordinatis semicirculo AEB; & per extremitates harum proportionalium trajiciatur curva ACXTB; Dico, hanc curvam fore semiellipsem. Et, si idem præstetur respectu alterius semicirculi, Dico, integram ellipsim describtum iri.



Dem. Quoniam per constr., $PX : PR :: OC : OE$;
& $VT : VN :: OC : OE$;
erit $PX : PR :: VT : VN$;
& permutando, $PX : VT :: PR : VN$;
Ergo $\overline{PX}^2 : \overline{VT}^2 :: \overline{PR}^2 : \overline{VN}^2$.

Atqui ex nat. circuli, $\overline{PR}^2 = AP \times BP$;
& $\overline{VN}^2 = AV \times VB$;
Quare $\overline{PX}^2 : \overline{VT}^2 = AP \times BP : AV \times VB$;
& proinde *quadrata ordinatarum* PX, VT *sunt inter se, uti rectangula sub segmentis axis* AB; atque hinc per def., curva ACBD erit ellipsis. Quod erat &c.

De

De utroque Axe Ellipseos.

SYNOPSIS.

Quadrata ordinatarum ad majorem axem, ad rectangula sub segmentis hujus axis ita se habent, vel, ut quadratum minoris axis ad quadratum majoris, vel, ut parameter majoris axis ad eumdem axem. Quadratum cujuslibet ordinatæ ad majorem axem minus est rectangulo abscissæ in parametrum ejusdem axis; hinc origo nominis hujus curvæ. Quadratum semisseos minoris axis æquatur rectangulo sub segmentis majoris axis, secti ab alterutro focorum. Quadrata ordinatarum ad minorem axem quomodo se habeant ad rectangula sub segmentis ejusdem axis. Hinc utrique axi conjugato convenit eadem primaria proprietas; ac proinde, more analytico, deducitur æquatio generalis, quæ naturam ellipseos perfecte exprimat respectu suorum axium. Omnis ordinata axi, occurrit ellipsi in duobus punctis; quòve magis a centro distat, eò magis decrescit, donec evanescat in vertice axis. Hinc vertices oppositi utriusque axis, tangentes in extremitatibus axium; atque inde deducitur, ellipsim ex earum curvarum numero esse, quæ in se recurrunt, & ab alterutro axe bifariam dividuntur, & quadrifariam a duobus axibus conjugatis.

DEFINITIO.

193. *Recta* AB *vocatur* axis major; *recta* CD axis minor; & axes conjugati *dicuntur duæ hujusmodi rectæ, simul comparatæ.*

Parameter majoris axis *est tertia proportionalis majori axi, & minori.*

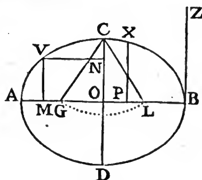
Parameter minoris axis *est tertia proportionalis minori axi, & majori.*

Centrum ellipseos *est punctum* O, *quod axem bifariam dividit.*

Re-

Recta, quæ transit per centrum, & utrinque a curva terminatur, dicitur diameter.

Denique, si ab extremitate C minoris axis, tanquam centro, & intervallo semisseos majoris axis, describatur arcus circuli, qui secet majorem axem in duobus punctis G & L; hæc puncta G & L vocantur foci *ellipseos.*



PROPOSITIO III.

194. Q*Uadratum ordinatæ* PX *ad majorem axem, se habet ad rectangulum respectivum* $AP \times PB$, *uti quadratum minoris axis* CD *est ad quadratum majoris* AB.

Dem. Per def., $\overline{PX}^2 : \overline{OC}^2 :: AP \times PB : AO \times OB.$

Atqui $AO \times OB = \overline{AO}^2;$

Ergo $\overline{PX}^2 : \overline{OC}^2 :: AP \times PB : \overline{AO}^2;$

& permutando, $\overline{PX}^2 : AP \times BP :: \overline{OC}^2 : \overline{AO}^2.$

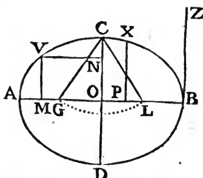
Sed $\overline{CD}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{AO}^2;$

Ergo $\overline{PX}^2 : AP \times PB :: \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2.$

Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

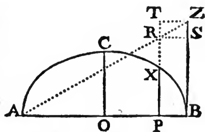
195. *Quadratum ordinatæ* PX *ad majorem axem, ita ſe habet ad ſuum reſpectivum rectangulum ſub ſegmentis* AP > PB, *uti parameter* BZ *majoris axis, eſt ad eumdem axem.*



Dem. Per præced., $\overline{PX}^2 : AP \times PB :: \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2$.
Atqui per def. parametri, $:: AB . CD . BZ$;
Ergo $\overline{CD}^2 : \overline{AB}^2 :: BZ : AB$;
& conſequenter $\overline{PX}^2 : AP \times PB :: BZ : AB$.

PROPOSITIO V.

196. *Quadratum ordinatæ* PX *ad majorem axem, minus eſt rectangulo abſciſſæ* PB *in parametrum* BZ *ejuſdem axis.*



Demonſt. Per præced., $\overline{PX}^2 : AP \times BB :: BZ : AB$.
Atqui propter triangula ſimilia ABZ, APR, habetur $BZ : AB :: PR : AP$;
Ergo $\overline{PX}^2 : AP \times BP :: PR : AP$;

du-

ductisque duobus ultimis terminis ejusdem proportionis in eamdem abscissam PB, erit

$$\overline{PX}^2 : AP \times PB :: PR \times PB : AP \times PB.$$

Cum autem duo consequentia sint æqualia, duo quoque antecedentia $\overline{PX}^2$, $PR \times PB$ æqualia erunt. Atqui rectangulum $PR \times PB$, seu rectangulum PRSB minus est rectangulo PTZB parametri in abscissam PB; ejusque defectus est parvum rectangulum RTSZ; Ergo $\overline{PX}^2 < PTZB$, defectu totius rectanguli RTSZ.

Monitum.

197. *Porro latus rectum, seu parameter eo ab Antiquis consilio invecta est, ut esset mensura, juxta quam comparari possent potentiæ linearum, ordinatim ad diametrum positarum; atque hinc certam aliquam, & constantem regulam haberent, per quam reliquas harum curvarum proprietates intelligere, ac notas sibi reddere facilius possent. Ut autem in singulis diversæ sunt, ita & parametri diversas in singulis obtinent affectiones; & rectangula, parametris, & abscissis diametrorum contenta, longe diversam in singulis ad quadrata ordinatarum habent proportionem.*

In ellipsi quidem quadrata illa deficiunt figurà, quæ similis est illi, quæ sub abscissa, & parametro continetur; uti nuper demonstratum est; in parabola iisdem rectangulis æquantur; in hyperbola vero excedunt figura simili. Unde & nomenclaturam singulæ suam sortitæ sunt; nam parabola significat æqualitatem, *ellipsis* defectum, & *hyperbola* excessum.

Cæterum, uti quadrata ordinatarum ad diversas diametros, diversa quoque sunt; ita & diametris singulis propria, & unica parameter assignatur; uti deinceps demonstrabitur.

PROPOSITIO VI.

198. **Q**Uadratum OC *semisseos minoris axis* CD, *æquatur rectangulo* AL×LB *partium inæqualium majoris axis, secti ab alterutro focorum* L.

Dem. In triangulo rectangulo COL, ex Elem.,

$$\overline{CO}^2 = \overline{CL}^2 - \overline{LO}^2.$$

Atqui (*n.* 193.) CL = OB;

Ergo $\overline{CO}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2.$

Cum autem axis sit divisus æqualiter in O, & inæqualiter in L, erit ex Elem. Geom. planæ n. 513.,

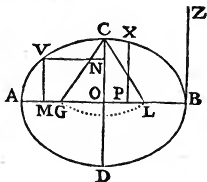
$$AL \times LB = \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2;$$

Ergo $\overline{OC}^2 = AL \times LB.$

Quod erat &c.

Corollarium.

199. **E***Rgo quadratum* PX *ordinatæ ad majorem axem, est ad rectangulum* AP×PB; *uti rectangulum* AL × LB $= \overline{OC}^2$, *est ad quadratum* $\overline{OB}^2$ (*n.* 194.).



PROPOSITIO VII.

200. **Q**Uadratum ordinatæ VN *ad minorem axem* CD, *est ad rectangulum* CN×ND, *partium*,

tium, quas ſecat hæc ordinata; uti quadratum majoris axis eſt ad quadratum minoris.

Demonſtratio. Ductà ordinatim applicatà VM majori axi, habetur $\overline{AO}^2:\overline{CO}^2::AM\times MB:\overline{VM}^2$.

Eſt autem $AM\times MB=\overline{AO}^2-\overline{MO}^2$;

Ergo $\overline{AO}^2:\overline{CO}^2::\overline{AO}^2-\overline{MO}^2:\overline{VM}^2$;

& permutando, $\overline{AO}^2:\overline{AO}^2-\overline{MO}^2::\overline{CO}^2:\overline{VM}^2$;

& divid., $\overline{AO}^2:\overline{AO}^2-\overline{AO}^2+\overline{MO}^2::\overline{CO}^2:\overline{CO}^2-\overline{VM}^2$.

In hac ultima analogia notabis, ex regulis analyſis affici ſigno $+$ *quadratum* $\overline{MO}^2$. *Ratio eſt, quia, dum dividendo jubemur ſubducere* $\overline{AO}^2$, *plus juſto tollitur; ſubducere enim oporteret non integrum* $\overline{AO}^2$, *ſed* $\overline{AO}^2-\overline{MO}^2$; *hac de cauſa ſigno* $+$ *reſtituitur* $\overline{MO}^2$, *quod plus juſto ſublatum fuerat.*

Cum autem $\overline{AO}^2-\overline{AO}^2$ ſeſe invicem deſtruant, fiet
$$\overline{AO}^2:\overline{MO}^2::\overline{CO}^2:\overline{CO}^2-\overline{VM}^2.$$

Jam vero propter parallelas, $\overline{MO}^2=\overline{VN}^2$;

& eadem de cauſa $\overline{CO}^2-\overline{VM}^2=\overline{CO}^2-\overline{NO}^2$;

atque inſuper ex Elem., $\overline{CO}^2-\overline{NO}^2=CN\times ND$;

Ergo, ſi in ultima analogia ſubſtituantur hujuſmodi valores, fiet $\overline{AO}^2:\overline{VN}^2::\overline{CO}^2:CN\times ND$;

ſive $\overline{VN}^2:CN\times ND::\overline{AO}^2:\overline{CO}^2::\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$.

Quod erat &c.

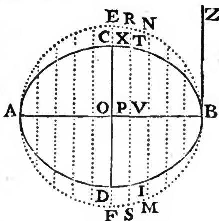
Corollarium I.

201. ERgo *quadrata ordinatarum ad minorem axem, sunt inter se, uti rectangula, quae singulis respondent*. Atque hinc jam constat, utrique axi conjugato eamdem proprietatem convenire.

Corollarium II.

202. EX Prop. III., & VII., & ex def. parametri utriusque axis, deduci potest, more analytico, aequatio generalis, quae naturam ellipseos perfecte exprimat respectu suorum axium.

Alteruter duorum axium, puta, AB, vocetur $2t$; ejusque conjugatus axis CD, vocetur $2c$; ordinata quaelibet XP, y; portio quaevis axis, intercepta a centro O, & occursu ordinatae, nimirum, OP, appelletur x: institui semper poterit haec analogia.



$$\overline{XP}^2 : BP \times PA :: \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2 :: p : AB$$
$$yy : tt - xx :: 4cc : 4tt :: p : 2t$$

Nam justa definitionem parametri,

$$AB(2t) : CD(2c) :: CD(2c) : p\left(\frac{4cc}{2t}\right).$$

Itaque multiplicatis extremis, & mediis utriusque proportionis, nimirum, primae

$$yy : tt - xx :: 4cc : 4tt,$$

& alterius $yy : tt - xx :: p : 2t,$

deducitur duplex æquatio : $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$,

& $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$.

Cum autem hæc proprietas semper conveniat omnibus punctis ellipsis, atque eadem determinet eorum positionem respectu duorum axium conjugatorum AB, CD; hinc *utraque æquatio perfecte exprimet naturam ellipsis, respectu suorum axium.*

Scholion.

SI plerique ex Tironibus calculo litterali nundum assueverint, poterunt hæc Corollaria omittere, & ad geometricas demonstrationes progredi.

Corollarium III.

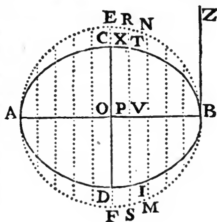
203. SI a quovis puncto V alterutrius axis conjugati, puta, AB, ducatur parallela TI alteri axi CD, *hæc occurret ellipsi in duobus punctis* T & I, *æque utrinque semper distantibus a puncto* V. Nam, ut puncta T & I pertineant ad ellipsim, necesse est, ut quadrata ordinatarum, utrinque ab axe sumpta, singula æqualia sint eidem quantitati $cc - \frac{ccxx}{tt}$.

Corollarium IV.

204. AB eadem æquatione $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$ deducitur, quo magis OP (x), utrinque a centro sum-

pta, augetur, eo magis decrescere ordinatam quamlibet XP (y), utrinque sumptam ab uno, vel altero axe; ita ut, si OP (x) æqualis evadat ipsi OB, vel OA (t), etiam ordinata XP (y) evanescat. Contra vero, quo plus OP (x) decrescit, eo magis ordinata quælibet XP (y), utrinque sumpta ab axe AB, augetur; ita ut, evanescente OP (x), quælibet ordinata XP (y), quæ in hoc casu erit OC, vel OD (c), futura sit ordinatarum omnium maxima. Unde patet,

I. Quemlibet ellipseos axem in binis punctis perimetro occurrere, ac binos habere vertices, quos *vertices oppositos* appellamus.



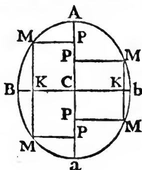
II. Si per extremitates alterutrius axis ducatur parallela alteri axi conjugato, *hæc erit tangens in iisdem punctis*.

III. Sed & inde liquet, ellipsim ex earum curvarum numero esse, quæ in se recurrunt, adeoque figuram comprehendunt.

Corollarium V.

205. AB eadem æquatione consequitur proprietas altera, quod, si in alterutro axe, hinc atque inde a centro, accipiantur puncta ab eodem æque dissita, *ordinatæ ab iisdem ductæ, erunt æquales*. Atque hinc, si recta quæcunque MM, terminata ab ellipsi,

ellipsi, secta sit bifariam ab altero axe B*b* in puncto K, quod aliud a centro sit, facile ostenditur, *eamdem fore parallelam alteri axi* Aa. Nam ductis MP, MP parallelis axi B*b*, recta PP divisa erit bifariam in C, quoniam MM ponitur bifariam divisa in K; ac proinde ordinatæ PM, PM erunt æquales; Ergo recta MM parallela erit axi A*a*.



Corollarium VI.

206. HInc *ellipsis ab alterutro axe bifariam dividitur, & quadrifariam a duobus axibus conjugatis.*

De Focis Ellipseos.

CUm ea, quæ de focis ellipseos, ac de communi diametrorum cum axibus proprietate demonstranda sint, a theoria tangentium facili nexu deducantur; placuit hinc, ut facilitati methodi consulerem, præcipuam tangentis, respectu utriusque axis, proprietatem paucis præmittere, quam ad reliquas diametros conjugatas infra traducam. Focorum itaque proprietates enucleatius hoc loco evolvam, tum propter insignem utilitatem in theoria conicorum, & praxi; tum vero maxime, ut, quæ ab antiquis Geometris ingeniose tradita, & inventa sunt, ne omittantur; & recentiorum Geometrarum methodus cum antiqua conferri possit.

SYNOPSIS.

A Dato puncto tangentem ducere. In utroque axe, utrinque producto ad occursum tangentis, tres continue proportionales, aliæque proportionum, & æquationum species. Apollonii methodus in inventione focorum, quos Puncta *vocat* ex comparatione. *Recentiorum methodus. Rectangulum partium inæqualium majoris axis, secti ab alterutro focorum, æquatur quadrato semisseos minoris axis; hinc inventio foci. Rectangulum sub duabus tangentibus, ab utraque extremitate axis ductis, & ab altera quavis tangente intercepte, æquatur rectangulo sub ordinata a puncto contactus, & sub semiaxe conjugato, ad eamdem tangentem producto, & consequenter quadrato dimidii axis minoris. A punctis occursus harum trium tangentium, rectæ ad focos ductæ, angulos utrinque rectos efficiunt. A puncto intersectionis harum rectarum, linea ad punctum contactus ducta, normalis est tangenti. A focis ad contactum ductæ rectæ efficiunt æquales cum tangente angulos. Hinc, si corpus luminosum statuatur in uno foco speculi elliptici, reflexio fiet in alium focum. Determinare rectam æqualem semiaxi majori. Duæ rectæ a focis ellipseos convenientes in quovis perimetri puncto, simul sumptæ æquantur axi majori. Hinc methodus describendæ ellipseos per motum continuum. In ellipsi determinare maximum triangulorum isoperimetrorum. Aliter tangentem ducere, & æqualitatem angulorum incidentiæ, & reflexionis ostendere. A focis ellipseos ad idem punctum perimetri inclinare duas rectas, quæ datam habeant rationem.*

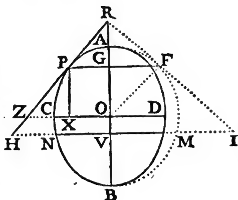
PRO-

PROPOSITIO VIII.

207. *Ex dato in ellipsis perimetro puncto* P *tangentem ducere* HPR.

A puncto dato P ducatur ordinata PG ad axem majorem; dein duabus rectis OG, OA accipiatur tertia proportionalis, quæ statuatur ab O in R; jungaturque PR, quæ erit tangens quæsita.

Demonstratio. I. Circa axem majorem describatur circulus AFB; producaturque ordinata PG, donec occurrat circulo in puncto F, a quo ducatur recta FR, quæ erit tangens circuli. Cum enim sit OF=OA, erit per constructionem :: OG . OF . OR; Ergo triangulum RFO est rectangulum in F; quippe quod est simile triangulo OGF, quod est rectangulum per constr. Itaque RF perpendicularis radio OF, tangit circulum.



II. Super linea RPH accipiatur aliud punctum H, a quo ducatur ordinata HV ad axem majorem, ulterius producta, donec occurrat tangenti circuli in I. Triangula similia RGF, RVI dabunt

GF:VI::RG:RV.

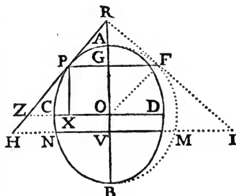
Rursus triangula similia RGP, RVH dabunt

GP:HV::RG:RV;

Ergo GF:VI::GP:HV.

Atqui

Atqui ordinatæ GF, VM ad circulum, ita se habent, uti ordinatæ PG, NV ad majorem axem ellipsis (*n.* 188.); & VM minor est rectà VI, propter tangentem RI circuli in solo puncto F; Ergo NV minor quoque esse debet, quam HV; & proinde punctum H extra circulum.



Idemque demonstrabitur de reliquis punctis omnibus, quæ sumantur super recta HR, excepto puncto P; Quamobrem HR tangit ellipsim in hoc solo puncto. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

208. *SI a puncto* P *contactus ducatur ordinata* PX *ad minorem axem, producaturque tangens, donec occurrat minori axi producto in* Z, *erunt in continua proportione* :: OX.OC.OZ.

Demonstratio. Tres rectæ OG, OA, OR cum sint per præced. continue proportionales, erit ex Elementis,

$$\overline{OG}^2, \text{ sive } \overline{PX}^2:\overline{OA}^2::OG:OR.$$

Est autem ex def. ellipsis,

$$\overline{PX}^2:\overline{OA}^2::CX\times XD:CO\times OD;$$

sive ex Elementis, $::\overline{CO}^2-\overline{XO}^2:\overline{CO}^2;$

præ-

præterea propter similitudinem triangulorum ZXP, ZOR,

PX, sive OG:OR::ZX:ZO;

Ergo $ZX:ZO::\overline{CO}^2-\overline{XO}^2:\overline{CO}^2$;

& invertendo, ac dividendo,

$$ZO:ZO-ZX::\overline{CO}^2:\overline{CO}^2-\overline{CO}^2+\overline{XO}^2;$$

hoc est, $ZO:XO::\overline{CO}^2:\overline{XO}^2$.

Itaque ZO, CO, XO sunt in continua proportione. Quod erat &c.

Corollarium.

209. HInc, si a puncto contactus ducatur ordinata quævis ad alterutrum axem, *erit quadrato semiaxis æquale rectangulum sub distantia ordinatæ a centro, & sub semiaxe producto ad concursum tangentis.*

PROPOSITIO X.

210. *SI recta* RP *ellipsim tangat in puncto* P, *a quo ducatur ordinata* PG *ad majorem axem, erit*

BG:GA::BR:RA.

Demonstr. Ex ostensa proprietate tangentis PR,

OR:OA::OA:OG;

& dividendo,

OR:OR—OA, sive RA::OA:OA—OG, sive AG;

& duplicatis antecedentibus,

BR+RA:RA::BA:AG;

& rursum dividendo,

BR+RA—RA:RA::BA—AG:AG;

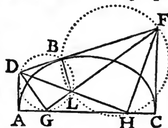
sive BR:RA::BG:GA.

Quod erat &c.

Mo-

Monitum.

211. A*Pollonius, ut in axe ellipseos focos exhibeat, hac utitur constructione, Prop. VI. & XLV.* Quartæ, *inquit*, parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex utraque parte; *hoc est, ellipsis axis* AC *ita secetur in duobus punctis* G & H, *ut tam* AG×GC, *quam* CH×HA *rectangulum, æquale sit quartæ parti figuræ. Quo posito, ulterius ostendit* G & H *focos esse ellipseos; quos* puncta *vocat* ex comparatione facta, *videlicet, ex comparatione rectangulorum sub segmentis axeos, cum quarta parte figuræ.* Figuram *porro hic vocat Apollonius* rectangulum, quod fit sub axe majore, ejusque parametro; *atque illud cum quarta sui parte ad usus traducit eximios, videlicet, inventionem focorum &c. Singulari autem præ cæteris rectangulis appellatione* figuram *vocavit antiquitas* rectangulum sub axe majore, & parametro; *quod, ex definitione parametri, æquale est quadrato axeos minoris. Sed quarta pars quadrati minoris axis est quadratum dimidii axis minoris; Ergo quadratum dimidii axis minoris æquale est* quartæ parti figuræ. *Unde, cum voce illa utar veterum Geometrarum, intelligi volo* quadratum semisseos axis minoris.



Nos vero ad focorum inventionem, & proprietates investigandas expeditius ita procedimus. Descripta ellipsi Prop. I. & II., utrumque focum ita definivimus, & determinavimus n. 193.

Si ab extremitate C minoris axis, tanquam centro, & intervallo semisseos axis majoris, describatur

batur arcus circuli, qui fecet majorem axem in duobus punctis G & L; hæc puncta vocantur *Foci* ellipseos.

Quibus præjactis,

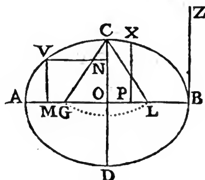
PROPOSITIO XI.

212. **R**ectangulum AL×LB *partium inæqualium majoris axis, secti ab alterutro focorum, æquatur quadrato* OC *semisseos minoris axis* CD, *hoc est, quartæ parti figuræ.*

Propositio demonstrata est n. 198.

Corollarium.

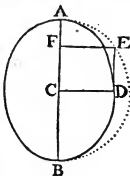
213. **E**X definitione foci, & ex æqualitate triangulorum COG, COL, patet, rectas AG, BL esse æquales, & GL bifariam esse divisam in O; hinc *distantia focorum a centro utrinque æqualis est.*



PRO-

PROPOSITIO XII.

214. *SI super axe majore* AB, *tanquam diametro, describatur circulus* AEB, *& per extremitatem* D *minoris axis* CD, *ducatur tangens, quæ eidem circulo occurrat in puncto* E, *a quo ducatur* EF, *perpendicularis axi majori in puncto* F; *Dico, rectangulum* AF×FB *æquale esse quartæ parti figuræ.*



Demonstratio. Rectangulum AF×FB$=\overline{FE}^2$; hoc est, quadrato semiaxis minoris CD, sive quartæ parti figuræ. Quod &c.

Scholion.

HAc constructione invenitur focus methodo Apolloniana, seu punctum ex comparatione, quod ita dividit axem majorem, ut rectangulum sub segmentis æquale sit quartæ parti figuræ (*n.* 212.).

PROPOSITIO XIII.

215. *REctangulum sub duabus tangentibus ab utraque extremitate axis ductis, & ab altera quavis tangente interceptis, æquatur rectangulo sub ordinata a puncto contactus ejusdem, & sub semiaxe conjugato, ad eamdem tangentem producto.*

Ellipsim ABC (*Fig. n.* 216.), cujus axes conjugati AC, DE, contingant in A & C, & alio puncto quovis B tres rectæ AF, CG, FG; ita quidem, ut FG occurrat rectis AF, CG in punctis F & G, & præterea pro-

productæ semidiametro DE occurrat in I; tum ex puncto contactus B demittatur BH, ordinata ad diametrum AC; Dico, $AF \times CG = BH \times ID$.

Demonstratio. Producatur GF, donec cum axe conveniat in L. Quoniam DH, DA, DL sunt in continua proportione (*n.* 207.), erit

$DL : DA :: DL - DA : DA - DH$;

sive $DL : DA$, seu $DC :: LA : AH$;

& invertendo, & deinde componendo, fiet

$CL : DL :: HL : AL$.

Est autem $CL : DL :: CG : DI$;

& $HL : AL :: HB : AF$;

Ergo $CG : DI :: HB : FA$;

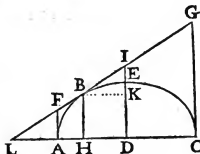
ac proinde $CG \times FA = DI \times HB$.

Quod erat &c.

Corollarium.

216. Hinc rursum sequitur, *rectangulum* $AF \times CG$, *vel* $HB \times ID$ *æquale esse quartæ parti figuræ, seu quadrato dimidii axis minoris*.

Ducatur enim BK parallela axi AC. Quoniam DK, DE, DI sunt in continua proportione (*n.* 208.), erit $DK \times DI = \overline{DE}^2$; Ergo $AF \times CG = \overline{DE}^2$, sive quartæ parti figuræ.



PRO-

PROPOSITIO XIV.

217. SI *ellipsim, cujus axis* AC, *tangant in* A & C, & *alio quovis puncto* B *rectæ* AD, CF, & DF, *quæ utrinque conveniat cum duabus reliquis in* D & F, *tum ex focis* G & H *ducantur lineæ* GD, GF, & HD, HF; *Dico, angulos* DGF, DHF *esse rectos*.

Demonstratio. Per Coroll. præced., rectangulum DA×CF æquatur quartæ parti figuræ, hoc est, rectangulo AG×GC (*n*.212.); Ergo AG:AD::FC:CG. Sunt autem anguli DAG, FCG recti; Ergo triangula DAG, FCG sunt similia ex Elem.; & angulus ADG æqualis angulo CGF. Est etiam angulus ADG una cum angulo AGD, æqualis uni recto, cum tertius DAG sit rectus ex hyp.; Quare & angulus CGF una cum angulo AGD, æquabitur uni recto; Ergo reliquus DGF est rectus. Eodem modo ostendam angulum DHF esse rectum. Quod erat &c.

PROPOSITIO XV.

218. I*Isdem stantibus, si ex puncto intersectionis* L *ad contactum* B *ducatur recta* LB; *Dico, hanc normalem esse ad tangentem* DF.

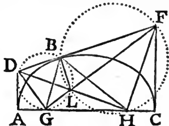
Demonstratio. Ponatur non ducta tangens DF; & super LD, LF, quæ non jacent in directum, describantur circuli: hi se secabunt in duobus punctis. Sint hæc puncta L & B; tum ducantur rectæ DB, FB. Cum anguli LBD, LBF sint recti ex Elem., lineæ DB, FB in directum jacent; Ergo coincidunt cum priore tangente DF; cui proinde normalis est LB in puncto contactus B. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

219. I*Isdem stantibus, si a focis ad contactum ducantur rectæ* GB, HB, *hæ cum tangente æquales angulos comprehendent* DBG, FBH.

Demonstratio. Quoniam anguli DGL, FHL recti sunt (*n.* 217.), transibunt per H & G circuli descripti Prop. præcedenti. Transit autem uterque circulorum etiam per B; quia anguli DBL, FBL sunt recti per præced.; Ergo tam anguli DBG, DLG, quam anguli FBH, FLH sunt æquales inter se; quippe qui ambo insistunt eidem arcui sui circuli. Atqui angulus DLG æquatur angulo FLH opposito ad verticem; Ergo & angulus DBG æquatur angulo FBH. Quod erat &c.



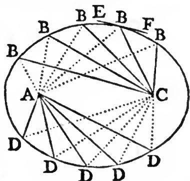
Scholion.

C*Um punctum* B, *in peripheria assumptum, sit quodcunque, sequitur, lineas omnes ex* H *in peripheriam ellipsis ductas, reflectendas in* G; *&* *vicissim. Quare hæc puncta* H *&* G *poli, seu foci nominantur; quæ ab Apollonio puncta ex comparatione facta dicuntur. Porro hæc in ellipticis mirabiles habent proprietates; quarum aliquas attingam.*

Corollarium.

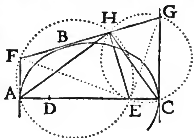
220. *SI corpus luminosum statuatur in uno foco* C *speculi elliptici, reflexio fiet ad alium focum* A.

Sit itaque speculum ellipticum; sitque radius quilibet CB, procedens ab uno foco C, & incidens in superficiem ellipticam; Dico, radium reflexum, illi respondentem, transire per punctum A. Cum enim in omni curva superficie angulos metiamur penes tangentem, si per B intelligatur duci tangens EBF, anguli CBF, ABE erunt æquales; cum autem anguli incidentiæ, & reflexionis tales esse debeant, radius CB reflectetur in A.



PROPOSITIO XVII.

221. *SI ellipsim* ABC, *cujus axis* AC, *&* foci D *&* E, *tangant in punctis* A, C, B *rectæ* AF, CG, FG, *quæ concurrant in punctis* F *&* G, *deinde ex foco* E *erigatur linea* EH, *perpendicularis tangenti* FG, *junganturque puncta* AH, CH; *Dico, angulum* AHC *rectum esse.*



De-

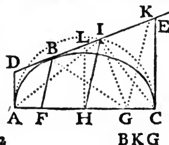
Demonstratio. Ductis rectis FE, EG, describantur super FE, EG, tanquam diametris, circuli FHE, HGC. Ac circulus quidem FHE, cum anguli EHF, EAF sint recti, transibit per puncta H, F, A; circulus vero HGC, cum anguli GHE, ECG sint pariter recti, transibit per H & C. Erunt igitur anguli AHF, AEF inter se æquales; quia insistunt eidem arcui AF; & pariter inter se æquales anguli EHC, EGC, insistentes eidem arcui EC.

Jam vero angulus CGE æqualis est angulo FEA; uti constat in demonstratione Prop. XIV. n. 217.; Ergo angulus CHE æquatur angulo AHF; Quare, si utrisque æqualibus addatur communis angulus AHE, fiet angulo FHE recto per hyp., æqualis angulus AHC; qui proinde & ipse rectus erit. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVIII.

222. *SI ellipsim* ABC, *cujus axis* AC, *poli* F *&* G, *tangant in punctis* A, B, C *rectæ* AD, CE, DE, *concurrentes in punctis* D *&* E, *ductàque ex polo* F *rectà* FB *ad punctum contactus*, *ducatur præterea ex centro* H *recta* HI, *parallela rectæ* FB, *occurrens tangenti* DE *in* I; *Dico*, *lineam* HI *æqualem esse semiaxi* HC.

Et reciproce, *si* HI, *occurrens tangenti* ED, *sit æqualis semiaxi* HC; *Dico*, *rectam* HI *parallelam esse ipsi* FB.



Demonstratio. Fiat BI = IK; junganturque BG, GK, & rectæ AI, IC. Quoniam BI = IK, erit BI : IK :: FH : HG; ac proinde rectæ BF, KG sunt parallelæ; & angulus

BKG=DBF=IBG (*n.* 218.); Quare duo latera BG, GK sunt æqualia. Sunt autem & duo reliqua latera BI, IG æqualia duobus lateribus KI, IG; Ergo angulus BIG = angulo KIG; & consequenter recta GI perpendicularis tangenti DE; Itaque per præced. angulus AIC rectus erit; hinc circulus centro H, intervallo HC, descriptus, transibit per I; eritque recta HI = rectæ HC, semiaxi. Quod erat primum.

Reliquis manentibus, sit jam recta HI, quæ occurrat tangenti ED in I, æqualis semiaxi HC; Dico, rectam HI parallelam esse rectæ FB.

Si negas; esto, si fieri potest, HL parallela rectæ FB, occurrens tangenti ED in L; Ergo per primam partem hujus, erit HL=HC=HI; Quare circulus centro H, intervallo HC, descriptus, transibit per I & L; quod est absurdum; Ergo HL non est parallela ipsi FB, nec quævis alia, præter rectam HI. Quod erat alterum.

K E I L B D A F H G C

PROPOSITIO XIX.

223. *Si ex focis ellipseos* D & E *inflectantur rectæ* DB, EB, *convenientes in puncto quodam peripheriæ* B; *Dico*, DB + EB *rectas simul sumptas æquari axi* AC.

G B I H A D F E C

Demonstr. Sit F centrum ellipseos; actaque per B tangente IBG, ducatur recta FG, parallela re-

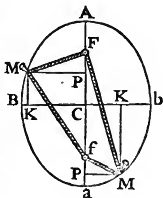
ctæ

ctæ DB, secans rectam EB in H. Quoniam BD, FG sunt parallelæ, erit angulus FGB = DBI = EBG (*n.* 218.); Ergo HB = HG. Rursum, cum sit DE:FE::BE:HE, sitque DE dupla ipsius FE, erit & EB dupla rectæ BH = HG. Est autem etiam BD dupla rectæ FH; cum sit DE:FE::DB:FH; Ergo EB + BD simul sumptæ, duplæ sunt ipsius FG, hoc est, semiaxis FC per præced., ac proinde æquales axi AC. Quod erat &c.

Corollarium I.

224. Huic Propositioni innititur vulgaris methodus describendæ ellipsis per motum continuum, ope funiculi.

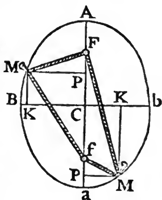
Proponatur filum FM*f* pro futura longitudine axis majoris A*a* ellipseos describendæ. Itaque in plano defigantur duæ extremitates funiculi FM*f* in duobus punctis F, *f*, quorum distantia F*f* sit minor longitudine ejusdem; ac stylo M filum hoc continuò tensum ita gyretur circa hæc duo puncta, ut eòdem redeat, unde discessit; hoc motu continuo stylus M describet ellipsim.



Duo puncta fixa F, *f*, erunt *Foci*. Recta A*a*, quæ per focos transit, & utrinque terminatur a perimetro ellipsis, est *Axis major*; atque ita *Axis minor* B*b*, *Centrum* C, *Ordinatæ* MP, vel MK.

Corollarium II.

225. SI duo foci F & *f* ita mutuo accedant, ut coalescant in ipso centro C, palam est, ellipsim in hoc casu desinere in circulum, cujus radius erit recta æqualis semissi funiculi affixi in duabus extremitatibus eidem puncto C, quod erit centrum. Itaque, ut initio monuimus, considerari poterit *circulus, tanquam species particularis ellipseos, in qua distantia focorum nulla sit.*



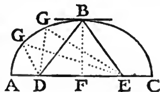
Corollarium III.

226. *IN ellipsi triangulorum isoperimetrorum maximum est isosceles.*

Describatur ellipsis quæcunque ABC, cujus axes AC, FB, poli D & E; junganturque puncta DB, BE; tum super ED, tanquam basi, triangula constituantur quæcunque DGE, quorum vertices G sint in peripheria.

Constat I. ex præced., triangula DBE, DGE &c. esse isoperimetra.

Constat II., illorum maximum esse triangulum DBE. Agatur enim per B tangens, quæ, cum in uno tantum puncto B ellipsi occurrat, & reliquà sui parte tota cadat



extra,

extra, patet DGE triangula, quæ terminantur in ellipsi, minorem habere altitudinem triangulo DBE, adeoque illo esse minora.

Constat III., triangulum DBE esse isosceles.

Corollarium IV.

227. EX *eadem proprietate focorum consequitur modus alter ducendi tangentem* SPR *ex dato quovis puncto* P *in ellipsis perimetro.*

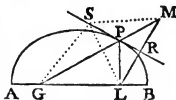
A focis G & L ducantur rectæ GP, LP; & producatur GP, donec fiat PM = PL; tum jungatur ML, quæ bifariam secetur in R; ducaturque PR, quæ erit tangens quæsita.

Sumatur enim super tangente RP quodvis aliud punctum S, a quo ad focos ducantur rectæ SG, SL; ducaturque pariter recta SM. Quoniam triangulum LPM est isosceles, & PR secat bifariam ejusdem basim, erit quoque isosceles triangulum LSM; Ergo SL = SM. Jam vero GS + SM majores sunt ipsa GM, seu GP + PL; Ergo GS + SL majores sunt ipsis GP + PL, hoc est, axe AB; Ergo punctum S est extra ellipsim (*n.* 223.).

Corollarium V.

228. SI *a focis* G *&* L *ad contactum* P *ducantur rectæ* LP, GP, *ostenditur rursus æqualitas angulorum* GPS, LPR, *incidentiæ, & reflexionis.*

Nam angulus GPS æquatur angulo MPR opposito ad verticem. Atqui angulus MPR æquatur angulo LPR; triangulum quippe isosceles LPM, per Coroll. præced., dividitur in duo triangula æqualia a recta PR perpendiculari in suam basim; Ergo &c.

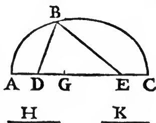


PROPOSITIO XX.

229. **E** *Focis ellipseos* D & E *duas rectas inclinare ad idem punctum perimetri, quæ datam contineant rationem* H *ad* K.

Debet autem data ratio major esse ratione AD ad DC, minor verò ratione AE ad EC.

Resol. & Dem. Secetur axis AC in G, secundum datam rationem H ad K; quæ, cum ponatur major ratione AD ad DC, & minor ratione AE ad EC, manifestum est, rectam AG majorem esse rectà AD, minorem verò rectà AE, ac proinde punctum G cadere inter polos D & E. Erigatur itaque ex polo D ad peripheriam linea DB = AG; junganturque puncta BE; Dico, factum esse, quod petebatur.



Cum enim DB + BE = AC, & per constr., DB = AG, erit reliqua BE = GC; Ergo DB : BE :: AG : GC :: H : K. Quod &c.

De Diametris.

DEfinitio ellipsis ferebat, ut quadrata applicatarum ad axem, ita se haberent, uti rectangula sub segmentis axis; poterat tamen dubitari, an hanc proprietatem haberent omnes ordinatæ ad alias quascunque diametros; quod jam demonstrare aggredimur.

Sy-

SYNOPSIS.

Triangula a tangentibus, & axe comprehensa, demonstrantur æqualia triangulis terminatis ab iisdem tangentibus, & diametro. Hinc quæcunque diameter bifariam secatur a centro ellipseos. Similiter, si intra ellipsim parallelæ tangentibus ducantur, æquationes aliæ triangulorum, & quadrilaterorum demonstrantur, respectu axis, & diametri cujusvis; ac casus omnes referuntur. Hinc omnis recta, quæ intra ellipsim ducitur, parallela tangenti alicujus diametri, bifariam secatur ab eadem diametro, cui proinde ordinata est. Definitio diametrorum conjugatarum, & parametri, respectu cujusvis ex diametris conjugatis. In omni ellipsi quadrata ordinatarum omnium ad quamlibet diametrum, sunt inter se, uti rectangula sub segmentis diametri. Hinc omnia, quæ ex primaria ellipseos proprietate deducuntur theoremata, respectu duorum axium, æque traducuntur ad duas quascunque diametros. Datæ ellipseos diametrum invenire, vel centrum, vel diametrum, quæ per datum punctum transeat, vel datæ diametri diametrum conjugatam, vel ordinatim applicatas. Ordinatæ, quæ ad duas quascunque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividunt ipsas diametros in eadem ratione. Hinc rursum in qualibet ellipsi positio ordinatarum cujuscunque diametri definitur.

PRO-

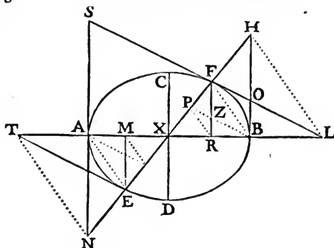
PROPOSITIO XXI.

230. D*Atis majore axe* AB, *&* *diametro* EF, *&* *utriusque tangentibus* FL, BH, *quæ se se invicem secent, ac terminentur, altera ab axe, & altera a diametro, ulterius productis; Dico, triangulum* BOL, *factum a duabus tangentibus, & axe, æquari triangulo* FOH, *facto a duabus tangentibus, & diametro.*

Demonstratio. Ductâ FR ordinatâ ad axem, & BP parallelâ tangenti diametri, habebitur (*n.* 208.), ::XR.XB.XL.

Triangula vero similia XBP, XLF exhibent
XP:XF::XB:XL.
Est autem XB:XL::XR:XB;
Ergo XP:XF::XR:XB;
ac proinde rectæ PR, FB sunt parallelæ.

Pariter triangula similia XRF, XBH dant
XF:XH::XR:XB.
Atqui XR:XB::XP:XF;
Ergo XF:XH::XP:XF::XB:XL.



Re-

Rectæ itaque FB, HL sunt pariter parallelæ; Ergo triangula FBL, FBH sunt æqualia; sublatoque utrinque communi triangulo FOB, remanet triangulum BOL æquale triangulo FOH. Quod erat &c.

Corollarium I.

231. EOdem modo demonstrabitur, *triangulum* XLF = *triangulo* XHB. Nam, si triangulis æqualibus BOL, FOH, addatur quadrilaterum commune BZFO, fiet quadrilaterum FZBL = quadrilatero FZBH. Si autem primo quadrilatero adjiciatur triangulum PZF, & secundo triangulum RZB = PZF, habebitur quadrilaterum PFBL = quadrilatero RFHB. Quòd si fiat permutatio, & substitutio, hinc atque inde, triangulorum æqualium PZF, RZB, construetur triangulum RFL æquale triangulo PBH. Addatur primo triangulum PRF, & secundo triangulum PRB = PRF; fiet PFLR = PHBR; denique utrinque adjecto communi triangulo XPR, habebitur triangulum XLF = triangulo XHB.

Corollarium II.

232. SI ab altera extremitate A axis, & E diametri fiat eadem constructio, eædem utrinque æqualitates demonstrari poterunt; puta, triangulum TEX erit æquale, & simile triangulo XFL &c. Quod facile potest demonstrari. Cum autem XE æquetur rectæ XF, hinc sequitur, *quamcunque diametrum bifariam secari a centro* X *ellipseos*.

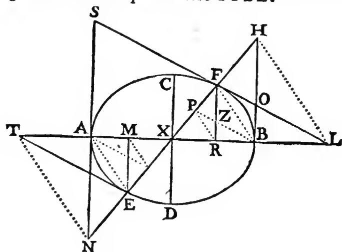
Corollarium III.

233. SI producatur tangens utraque NA & FL, usque ad occursum in S, *triangulum* FSN *erit æquale triangulo* SAL. Cum enim triangula ANX,

ANX, XFL sint æqualia, addito quadrilatero communi ASFX, erit FSN = SAL.

Corollarium IV.

234. HInc *triangulum* PBH *æquatur quadrilatero* FPBL. Nam, si triangulis æqualibus BOL, FOH utrinque addatur quadrilaterum commune FRBO, fiet triangulum FRL = quadrilatero FRBH; sublatoque quadrilatero FRBO, & adjecto quadrilatero PBOF utrinque, construetur triangulum PBH = quadrilatero FPBL.



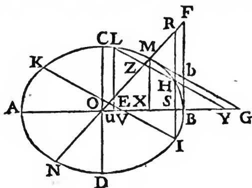
PROPOSITIO XXII.

235. D*Atis axe* AB, *&* *diametro* MN, *&* *utriusque tangentibus* BF, MG, *quæ se se invicem secent, ac terminentur, altera ab axe, &* *altera a diametro, utrinque productis, si a puncto* H, *sumpto in perimetro ellipseos, ducantur duæ rectæ* SR, LY, *parallelæ tangentibus; Dico, triangulum* HSY, *factum*

ctum ab hisce parallelis, & axe, æquari quadrilatero SRFB, *facto a tangente ejusdem axis, eique parallelà, interceptà ab axe, & diametro.*

Demonstratio. Ducatur MX ordinata ad axem. Triangula MXG, HSY cum sint similia, erunt inter se, uti quadrata suarum basium MX, HS. Hæc autem quadrata sunt, uti rectangula $AX \times XB$, $AS \times SB$, sive, uti quadratum $\overline{OB}^2 - \overline{OX}^2$ est ad quadratum $\overline{OB}^2 - \overline{OS}^2$; Ergo triangulum $MXG : HSY :: \overline{OB}^2 - \overline{OX}^2 : \overline{OB}^2 - \overline{OS}^2$; sive $MXG : \overline{OB}^2 - \overline{OX}^2 :: HSY : \overline{OB}^2 - \overline{OS}^2$.

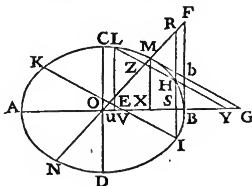
Jam vero quadrata $\overline{OB}^2$, $\overline{OX}^2$, $\overline{OS}^2$ sunt inter se, uti triangula similia OBF, OXM, OSR, quorum latera sunt bases; Ergo triangulum MXG est ad triangulum OBF—OXM, hoc est, ad quadrilaterum XBFM, uti triangulum HSY est ad triangulum OBF—OSR, hoc est, ad quadrilaterum SBFR. Atqui triangulum MXG æquatur quadrilatero XBFM per Coroll. præced.; Ergo triangulum HSY æquatur quadrilatero SBFR. Quod erat &c.



Ca-

Casus II.

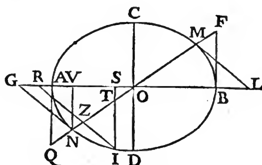
236. *SI punctum* I, *ex quo ducuntur parallelæ tangentibus, sit ultra axem, respectu diametri;* triangula MXG, SIV, cum sint similia, sunt inter se, uti quadrata suarum basium MX, SI. Quia vero hæ bases sunt ordinatæ ad axem, earum quadrata erunt, ut rectangula respondentia. Quare eodem modo demonstrabitur, triangulum SIV, factum a duabus parallelis, & axe, æquari quadrilatero SBFR, facto ab axis tangente, ejusque parallelà, interceptà inter axem, & diametrum.



Casus III.

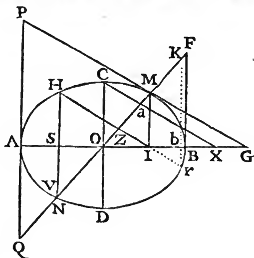
237. *SI punctum* I *ita sit positione datum, ut parallela tangenti axis secet axem in puncto* S, *ultra centrum, respectu hujus tangentis, sitque* IS *ultra axem, respectu puncti* M *diametri;* in hoc casu, ductis tangentibus ad alteram extremitatem A & N, axis & diametri, facile demonstrabitur, triangulum ISR æquari quadrilatero TSAQ. Nam ductà ordi-

dinatâ NV ad axem, triangula NVG, ISR erunt, uti quadrata suarum basium NV, IS &c.



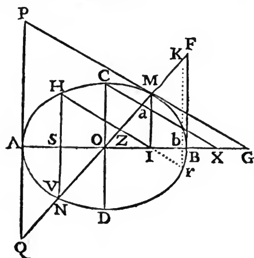
Casus IV.

238. SI *punctum* C, *unde discedunt parallelæ, reperiatur ultra diametrum, respectu axis, idemque positione datum sit in extremitate* C *minoris axis;*



trian-

triangulum COX, factum a duabus parallelis, & axe, erit æquale triangulo OBF, facto a tangente axis, & diametro. Nam triangula COX, MIG, cum sint inter se, uti quadrata $\overline{CO}^2$, $\overline{MI}^2$, seu, uti rectangula $AO \times OB$, idest, $\overline{OB}^2$, & $AI \times IB$, erunt quoque, ut supra, uti triangulum OBF ad quadrilaterum IBFM. Cum autem triangulum MIG sit æquale huic quadrilatero, triangulum quoque COX erit æquale triangulo OBF. Ratio est, quia CO, parallela tangenti axis, occurrit axi, & diametro in uno eodemque puncto; ac proinde evanescit ejus pars intercepta ab axe, & diametro; & quadrilaterum desinit in triangulum.



Casus V.

239. SI *punctum* L *reperiatur inter minorem axem, & diametrum;* facile demonstrabitur, triangulum L*u*Y = quadrilatero E*u*BF.

Casus VI.

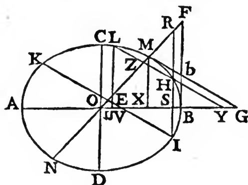
240. DEnique, *si punctum* H *sit ultra minorem axem, respectu diametri*, ut in Fig. n. 238.; ducatur ab extremitate A axis tangens QP, donec occurrat diametro in Q, & tangenti MG productæ, in P; tum ductà parallelà CX, triangula COX, HSI erunt, uti quadrata suarum basium CO, HS, sive, uti rectangulum $AO \times OB$, hoc est, $\overline{AO}^2$, ad rectangulum $AS \times SB$, hoc est, $\overline{AO}^2 - \overline{SO}^2$; & consequenter, uti triangulum AQO ad quadrilaterum AQSV. Atqui triangulum COX est æquale triangulo OBF, quod æquatur triangulo AOQ; Ergo triangulum HSI est æquale quadrilatero AQSV.

PROPOSITIO XXIII.

241. *Stantibus iisdem, ut supra, nimirum, axe, diametro, tangentibus, & parallelis; Dico, triangulum* ZHR, *factum a duabus parallelis, & diametro, æquari quadrilatero* ZMGY, *facto a tangente hujus diametri, ejusque parallelà, interceptà ab axe, & diametro.*

Casus I.

Sit punctum H, *unde discedunt parallelæ, inter axem, & diametrum.* Triangulum OFB æquatur triangulo OMG; ac dempto utrinque communi quadrilatero OZHS, remanent ex una parte triangulum ZHR + quadrilaterum SRFB, simul sumpta, æqualia triangulo SHY + quadrilatero ZYGM, simul sumptis ex alia parte. Atqui per præced., quadrilaterum SRFB = triangulo SHY; Ergo triangulum ZHR æquatur pariter quadrilatero ZMGY.



Casus II.

242. *Si punctum* H, *unde discedunt parallelæ, sit ultra minorem axem, respectu diametri,* ut in Fig.

Fig. ſequenti; ad extremitatem A ducatur tangens PQ, quæ occurrat diametro, ſuæque tangenti in Q & P; atque hinc exurget triangulum APG = PMQ (*n.* 235.); demptàque utrinque figurà ZMPASH, ſupererunt ex una parte triangulum VHZ + quadrilaterum SAQV, ſimul ſumpta, æqualia triangulo SHI + quadrilatero IZMG, ſimul ſumptis ex alia. Atqui per præced., quadrilaterum SAQV = triangulo SHI; Ergo triangulum HVZ æquatur quadrilatero IZMG.

Caſus III.

243. *SI punctum* C *ſit in vertice minoris axis;* triangulum COX, per præced., æquatur triangulo OBF, ſive triangulo OMG = OBF (*n.* 230.); ſublatoque utrinque triangulo communi O*a*X, ſupereſt triangulum CO*a* æquale quadrilatero *a*MGX.

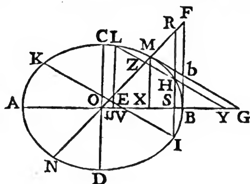
 Ca-

Casus IV.

244. SI *punctum* L *sit inter minorem axem*, & *diametrum*; triangulum L*u*Y est æquale quadrilatero *u*EFB, per præced.; sublatoque hinc triangulo SHY, & inde quadrilatero SBFR, æquali huic triangulo, habebitur quadrilaterum L*u*SH = quadrilatero E*u*SR; ac dempta figura communi *u*EZHS, supererit triangulum LEZ = triangulo ZRH, & consequenter quadrilatero ZMGY, quod est æquale eidem triangulo ZRH.

Casus V.

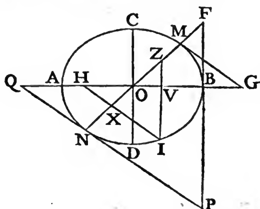
245. SI *punctum* I *sit ultra majorem axem*, *respectu diametri*; triangulum SIV est æquale quadrilatero SBFR, per præced. Addatur utrinque figura VERS, fiet triangulum IER = quadrilatero VEFB.



Casus VI.

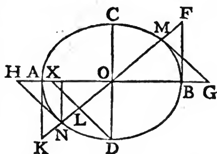
246. SI *punctum* I *sit inter axem*, *minoremque diametrum*, *ac præterea parallela* IH *secet axem versus* A; a puncto N ducatur tangens QP, donec occurrat axi, suæque tangenti in punctis Q & P; habe-

habebitur triangulum NFP æquale triangulo BQP (*n*. 235.). Dematur utrinque figura XIVBPN, supererunt ex una parte triangulum XIZ + quadrilaterum ZVBF, simul sumpta, æqualia triangulo IHV + quadrilatero HXNQ, simul sumptis ex alia; sublatoque hinc quadrilatero ZVBF, & inde triangulo IHV, æquali huic quadrilatero, residuum erit triangulum IXZ = quadrilatero HXNQ.



Casus VII.

247. *SI punctum* D *sit in extremitate minoris axis;* triangulum ODX æquatur triangulo OAK, seu triangulo ONH, per Coroll. præced.; sublatoque utrinque triangulo communi XLO, supererit triangulum DOL = quadrilatero XLNH.



Casus VIII.

248. S*I punctum* I *est ultra minorem axem*, *respectu majoris*; triangulum IRS æquatur quadrilatero STQA, seu quadrilatero STNG, per præced.; sublatoque utrinque communi trapezio RZTS, supererit triangulum IZT = quadrilatero NZGR.

Casus IX.

249. D*Enique*, *si punctum* I *esset ita positum*, *ut parallela* IT *ad alteram axis partem transiret*; triangulum IHR æquaretur quadrilatero XHBF, per præced., sive quadrilatero XHGM; sublatoque communi trapezio XHRZ, supererit triangulum IXZ = quadrilatero ZRGM.

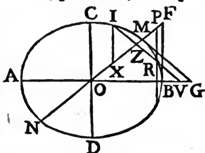
Co-

Corollarium.

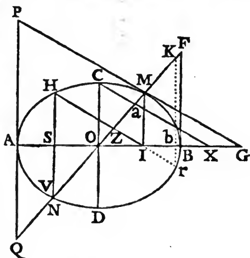
250. *Omnis recta linea, quæ intra ellipsim ducitur, parallela tangenti* MG *diametri* MN, *bifariam secatur ab eadem diametro, cui proinde ordinata est.*

Nam I. recta, quæ transit per centrum O, secatur bifariam; cum hæc ipsa sit diameter (*n.* 232.).

II. Omnes rectæ, quæ inter centrum O, & tangentem MG comprehenduntur, puta, IR, erunt pariter sectæ bifariam. Cum enim triangulum IXZ sit æquale quadrilatero ZVGM per præced., æquatur proinde triangulo ZRP = huic quadrilatero. Atqui hæc triangula sunt similia; Ergo IZ = ZR.



Similiter, cum triangulum HVZ sit æquale quadrilatero ZIGM, erit proinde æquale quadrilatero ZIBF. Quia vero parvum triangulum I*br* æquatur correspondenti quadrilatero; hinc sequitur, triangulum HVZ = triangulo KZ*r*; & propter similitudinem horum triangulorum, erit HZ = Z*r*.



III. Eodem modo demonſtrabitur, parallelas, quæ ſunt ultra centrum O, bifariam dividi a diametro MN.

DEFINITIO.

251. *SI diameter* PQ *ſit parallela tangenti* MG *alterius diametri* MN, *duæ diametri* PQ, MN *vocantur* Diametri Conjugatæ.

Tertia proportionalis diametro PQ, *& diametro* MN, *vocatur* Parameter *diametri* PQ.

Pariter tertia proportionalis diametro MN, *& diametro* PQ, *dicitur* Parameter *diametri* MN.

PROPOSITIO XXIV.

252. *QUadratum ordinatæ* SH *diametri* MN, *eſt ad rectangulum partium, quas ipſa ſecat,* MS,

MS, SN, *uti quadratum diametri conjugatæ* PQ *est ad quadratum diametri* MN; *nimirum*,

$$\overline{SH}^2 : MS \times SN :: \overline{QP}^2 : \overline{MN}^2.$$

Demonstratio. Ductis QT, HI perpendicularibus ad axem, triangulum OQT æquatur triangulo OFB, sive OMG. Nam triangulum OQX = quadrilatero XTFB (*n.* 235.); & triangulum SHI = quadrilatero SRMG, per præced. Atqui quadratum ordinatæ SH est ad quadratum ordinatæ OQ, uti triangulum SHI ad triangulum simile OQT; Ergo hæc duo quadrata sunt inter se, uti quadrilaterum SRMG, & triangulum MOG.

Jam vero $SRMG : MOG :: MS \times SN : \overline{MO}^2$;

Ergo $\overline{SH}^2 : \overline{QO}^2 :: MS \times SN : \overline{MO}^2$;

& permut., $\overline{SH}^2 : MS \times SN :: \overline{QO}^2 : \overline{MO}^2$;

ac loco quadratorum QO, MO, substitutis quadratis QP, MN, quæ sunt in eadem ratione, erit

$$\overline{SH}^2 : MS \times SN :: \overline{QP}^2 : \overline{MN}^2.$$ Quod &c.

Scholion.

Quod autem quadrilaterum SRMG *sit ad triangulum* MOG, *uti rectangulum* MS × SN *ad quadratum* MO, *sic facile ostenditur ex Elementis*.

Nam duo triangula similia MOG, SOR *ita se habent, uti quadrata laterum homologorum* MO, SO; *& dividendo*,

$$MOG - SOR : SOR :: \overline{MO}^2 - \overline{SO}^2 : \overline{SO}^2;$$

sive $SRMG : SOR :: MS \times SN : \overline{SO}^2$;

& componendo,

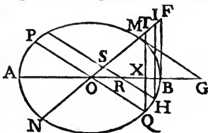
$$SRMG : SOR + SRMG :: MS \times SN : \overline{SO}^2 + MS \times SN;$$

hoc est, $SRMG : MOG :: MS \times SN : \overline{MO}^2$.

Co-

Corollarium I.

253. QUoniam quadrata ordinatarum omnium diametri MN ita ſe habent ſingula ad reſpectiva rectangula, uti quadratum diametri conjugatæ PQ ad quadratum diametri MN; hinc ſequitur, *in ellipſi quadrata applicatarum ad quamcunque diametrum, eſſe inter ſe, uti rectangula ſub ſegmentis diametri.*



Corollarium II.

254. COnſtat jam, quòd *diameter ellipſis ſit recta quælibet ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata.* Ut enim talis eſſe poſſit, duo requiruntur; I. ut biſecet omnes rectas parallelas tangenti a vertice ejuſdem ductæ, & utrinque ad ellipſim terminatas; II. ut quadrata ex ſemiſſibus iſtarum rectarum ſint, ut rectangula, quæ ſub ſegmentis diametri continentur. Utrumque demonſtratum eſt n. 250. & 253.

Corollarium III.

255. PRæter eas rectas, quæ tranſeunt per centrum ellipſis, nulla alia recta linea poteſt eſſe ejus diameter.

Co-

Corollarium IV.

256. OMnia, quæ ex Prop. III. n. 194., & ex primaria ellipseos proprietate, respectu duorum axium, deduximus Corollaria, ac Theoremata; ope hujus Propositionis, ejusque Coroll., æque traducuntur ad duas quascunque diametros conjugatas. Nam demonstrationes illæ perinde subsistunt, sive angulus, quem efficiunt axes in centro, sit rectus, sive non sit, & si loco duorum axium substituantur duæ diametri quæcunque conjugatæ. Itaque

I. *Quadratum ordinatæ* HS *diametro* MN, *est ad rectangulum partium, quas ipsa secat*, MS×SN, *ut parameter ejusdem est ad ipsam diametrum* MN. Demonstratur eodem modo, quo n. 195., si loco axium substituantur diametri.

II. *Quadratum ordinatim applicatæ ad diametrum quamcunque, minus est rectangulo suæ abscissæ in parametrum*. Nam demonstratio, respectu axis, n. 196. æque subsistit traducta ad quamlibet diametrum.

III. Proprietas fundamentalis demonstrata n. 252. & 253., convenit utrique diametro conjugatæ; hinc, quæ n. 202. 203. 204. 205. & 206. deduximus Corollaria, respectu duorum axium, traducuntur ex eodem principio ad diametros conjugatas.

IV. *Omnis recta, quæ ab extremitate diametri cujuslibet ducitur parallela suæ diametro conjugatæ, vel suæ ordinatæ, ellipsim in illo puncto contingit. Et reciproce.*

V. Hinc *a dato puncto in ellipsis perimetro tangens unica duci potest.*

Omnia constant ex n. 204.

Co-

Corollarium V.

257. QUemadmodum de parabola, ita & de ellipsi lubet congerere aliquot Corollaria, quæ vel satis in præcedentibus demonstrantur, vel inde saltem facile demonstrari poterunt.

I. Quodlibet perimetri ellipseos punctum, alicujus diametri verticem esse; ac proinde in qualibet ellipsi infinitos esse vertices, atque diametros infinitas.

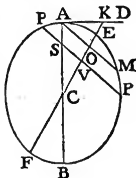
II. Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra ellipsim punctum ductam, alicui diametro ordinatim applicatam esse.

III. Diameter una non potest esse parallela ordinatis alterius conjugatæ, nisi & ista vicissim sit parallela ordinatis illius.

PROPOSITIO XXV.

258. *QUælibet diameter ellipsis non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividit bifariam, quàm quæ vel transeunt per centrum, vel ordinatim ad ipsam diametrum applicantur.*

Sit enim ellipsis AMB diameter quævis AB, cujus tangens sit AD, cui omnes ejus diametri ordinatæ sunt parallelæ (*n.* 256.). Ducatur in ellipsi recta PP, quæ utrinque ad curvam terminata, nec transeat per centrum C, nec sit ordinata diametro AB; Dico, eamdem ab ipsa diametro AB non posse secari bifariam.



Demonstratio. Si enim fieri potest, secetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Quo-

niam

niam hæc non est parallela ordinatis diametri AB, duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipsi PP parallela, ellipsim secabit in alio puncto. Ducatur itaque recta ista, & sit AM, quæ secetur bifariam in puncto O; jungaturque OC, quæ utrinque occurrat ellipsi in punctis E & F.

Quia igitur recta EF transit per centrum, ac proinde diameter est (*n.* 254.), & præterea bisecat in O subtensam AM, secabit quoque bifariam in V rectam PP, parallelam ipsi AM. Atqui ex hypothesi recta PP secatur bifariam in S; Ergo eadem PP bisecta erit tam in puncto S, quam in puncto V; quod est absurdum. Constat itaque propositum.

Corollarium I.

259. Itaque, *si aliqua ellipsis diameter bisecet rectam aliquam non transeuntem per centrum, & utrinque terminatam ad ellipsim; hæc erit ordinata ejusdem diametri.*

Corollarium II.

260. *Si recta aliqua bifariam secet duas parallelas, utrinque ad ellipsim terminatas; illa erit diameter ejusdem ellipsis.* Si enim non sit, ducatur per punctum bisectionis unius parallelæ, & centrum recta alia; hæc, velut diameter, bisecaret quoque rectam aliam parallelam. Quod fieri non potest.

Corollarium III.

261. *Ellipseos diametrum invenire.* Quæ enim duas quaslibet inscriptas parallelas bisecat, est diameter.

Co-

Corollarium IV.

262. E*Llipseos centrum invenire*. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concursu.

Corollarium V.

263. E*Llipseos diametrum invenire, quæ per datum punctum transeat*. Recta nempe, quæ datum punctum, & centrum conjungit.

Corollarium VI.

264. D*Ata in ellipsi diametro qualibet, diametrum conjugatam invenire*. Vel universaliter, *Data inscripta qualibet, diametrum invenire, cui illa sit ordinata*. Si data inscripta sit diameter, inveniatur recta, quæ datam inscriptam, aliamque ipsi parallelam bisecet. Si data inscripta, non sit diameter, inveniatur recta, quæ inscriptæ punctum medium, & ellipseos centrum conjungat.

Corollarium VII.

265. D*Atæ ellipseos ordinatim applicatas positione invenire, quæ datæ ipsius diametro conveniunt*. Inventa nempe, per præced., diametro conjugata, rectæ, quæ huic sunt parallelæ, erunt ordinatim positæ diametro datæ.

PROPOSITIO XXVI.

266. S*I diameter aliqua* EF *bisecet in* O *subtensam* A, *ductam a vertice* A *diametri alterius* AB, *ad*

ad quam demittatur ordinata EG, *cui per punctum* O *agatur parallela* OL; *Dico, segmenta* CL, CG, CA *esse in proportione continua; nimirum,*

$$CL : CG :: CG : CA$$

Demonstratio. Esto C centrum ellipsis. Quoniam AM, per hyp., dupla est ipsius AO, si præterea ad diametrum ducatur ordinata alia MN, erit quoque AN dupla ipsius AL; Quare, cum sit etiam diameter AB dupla ipsius AC, erit reliqua NB dupla pariter reliquæ LC; ac proinde $AN \times NB$ rectangulum quadruplum rectanguli $AL \times LC$.

Rursum, quoniam MN dupla est etiam ipsius OL, erit MN quadratum, quadruplum quadrati, quod fit ex OL; Ergo

$$\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{OL}^2 : AL \times LC.$$

Atqui ex natura ellipsis,

$$\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{EG}^2 : AG \times GB;$$

Ergo $\overline{OL}^2 : AL \times LC :: \overline{EG}^2 : AG \times GB;$

& $\overline{OL}^2 : \overline{EG}^2 :: AL \times LC : AG \times GB.$

Hinc rursus, propter triangula æquiangula COL, CEG, $\overline{OL}^2 : \overline{EG}^2 :: \overline{CL}^2 : \overline{CG}^2;$

Ergo $\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: AL \times LC : AG \times GB;$

ac terminis secundæ rationis addendo terminos primæ,

$$\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: AL \times LC + \overline{CL}^2 : AG \times GB + \overline{CG}^2;$$

hoc est, ex Elementis,

$$\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: AC \times CL : \overline{AC}^2 :: CL : CA;$$

Ergo $CL : CG :: CG : CA$.

Quod erat &c.

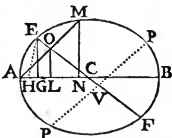
PRO-

PROPOSITIO XXVII.

267. *Ordinatæ, quæ ad duas quascunque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividunt ipsas diametros in eadem ratione.*

Sint AB, EF duæ quævis diametri ellipsis AMB. Ex vertice E ducatur ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF; Dico, fore BG:AG::FO:EO.

Demonstr. Producatur ordinata una AO, donec occurrat ellipsi in M; agaturque per punctum O recta OL, ipsi EG parallela. Quoniam diameter EF bisecat in O subtensam AM, ductam a vertice A diametri alterius, erit per præced.,



CL:CG::CG:CA.

Atqui CL:CG::CO:CE;

Ergo CG:CA::CO:CE;

& invertendo, CA:CG::CE:CO;

& per conversionem rationis, CA:AG::CE:EO;

& sumendo antecedentium dupla, erit etiam

AB:AG::EF:EO;

& dividendo, BG:AG::FO:EO.

Quod erat &c.

PROPOSITIO XXVIII.

268. *In qualibet ellipsi positionem ordinatarum cujuscunque diametri definire.*

Esto diameter AB, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra ellipsim recta quævis PP, quæ non tran-

transeat per centrum; seceturque bifariam in V; jungaturque CV, quæ extendatur in E & F; dein ex vertice A agatur recta AM, ipsi PP parallela, quæ diametro EF occurrat in O; demum diameter AB ita secetur in G, ut BG:AG::FO:EO; Dico, EG fore ordinatam unam ipsius AB.

Demonstratio. Si enim EG non sit ordinata ipsius AB, esto, si fieri potest, ejus ordinata EH. Et quoniam ad diametros AB, EF, ex alternis earum verticibus ductæ sunt ordinatæ EH, AO, erit per præcedentem, BH:AH::FO:EO;
& per constr., FO:EO::BG:AG;
Ergo BG:AG::BH:AH;
& componendo, AB:AG::AB:AH;
Ergo AG=AH; quod fieri non potest.

De mutua Diametrorum inter se, & cum Axibus comparatione.

SYNOPSIS.

Circulorum super utroque axe descriptorum ratio ad ellipsim. Diametri ellipsis intra ejus quadrantem sunt omnes inæquales. Et omnium minima est axis minor; maxima vero est axis major. Reliquæ eò majores sunt axe minore, quò magis ab eodem recedunt; & æqualiter ab axibus remotæ, æquales. Conjugatæ diametri dividuntur in eadem ratione per ordinatas super iis ductas a verticibus aliarum. Summa quadratorum axium æqualis est summæ quadratorum cujuscunque conjugationis diametrorum. Dum diametri minuuntur in recessu ab axe majore, vicissim conjugatæ ipsarum augentur. Axis major ad minorem habet majorem rationem, quàm diameter quævis alia ad suam conjugatam. Diameter axi propinquior, majorem habet rationem ad suam

N con-

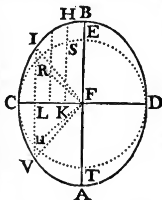
conjugatam, quàm diameter remotior ad conjugatam suam. Locus geometricus omnium diametrorum ellipsis exhibetur. Comparantur inter se rectangula, & summæ ex binis ellipseos diametris conjugatis; & decernitur casus vel rectanguli maximi, vel summæ omnium maximæ. In qualibet ellipsi ostenditur, binas diametros conjugatas æquales esse inter se.

PROPOSITIO XXIX.

269. *SI super axe minore* CD, *tanquam diametro, describatur circulus* CEDT, *ellipsis tota erit extra hunc circulum, quem tanget in extremitatibus* C *&* D *ejusdem diametri.*

Demonstratio. Ductis ordinatis HK, IL &c., earum quadrata erunt inter se, uti rectangula CK × KD, CL × LD &c. Atqui quadrata ordinatarum SK, RL ad circulum, æquantur singula hisce rectangulis; Ergo quadrata ipsarum HK, IL sunt inter se, uti quadrata SK, RL &c.

Hinc facile deducitur, quadrata HK, IL esse ad quadrata SK, RL, uti quadratum semiaxis BF ad quadratum semidiametri EF; ac proinde ordinatæ HK, IL ad ordinatas SK, RL erunt, ut axis BA ad diametrum ET, hoc est, ad axem CD. Atqui axis BA major est axe CD, sive diametro ET; Ergo omnes ordinatæ HK, IL &c. sunt majores ordinatis ad circulum; & consequenter ellipsis tota est extra circulum, quem tanget &c.



Co-

Corollarium.

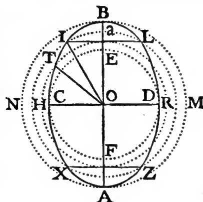
270. SI circa majorem axem AB describatur circulus BNAM, ut in Fig. sequenti, & alius CEDF circa minorem axem CD, ellipsis tota erit inter duas circumferentias.

PROPOSITIO XXX.

271. *Iisdem stantibus, si a centro* O *describantur aliæ circumferentiæ concentricæ, transeuntes per rectam* BE, *quæ est differentia duorum axium; Dico, quamlibet circumferentiam secare ellipsim in quatuor punctis, utrinque æque dissitis ab extremitatibus* B, A, C, D *duorum axium.*

Demonstratio. Si per punctum I, ubi circumferentia LRZXI incipit secare ellipsim, ducatur IL, parallela minori axi, hæc erit dupla ordinata ad axem majorem, a quo secta erit bifariam. Jam vero portio O *a* hujus axis, cum sit radius circuli LRZXI, ac secet rectam IL bifariam, necesse est, ut recta IL sit chorda ejusdem circuli, ac proinde secet etiam ellipsim in puncto L. Atqui puncta I & L sunt æque dissita a puncto B, uti pariter ab A, & similiter a C & D; Ergo &c.

Idem demonstrabitur de punctis X & Z.



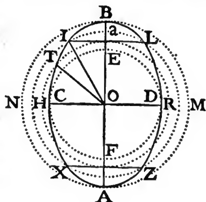
Corollarium I.

272. H*Inc intra quadrantem ellipsis diametri omnes sunt inæquales*. Nam CO, TO, IO sunt radii circulorum continuo crescentium.

Diameter omnium minima est axis minor; & omnium maxima est axis major.

Reliquæ eò majores sunt axe minore, quò magis ab eodem recedunt.

Diametri æqualiter ab axibus remotæ, æquales sunt.



Corollarium II.

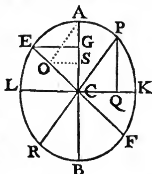
273. ELlipsis igitur diametri in recessu ab axe majore minores evadunt, maximamque patiuntur diminutionem, cum maxime distant ab axe majore, hoc est, cum ad axem minorem perveniunt; ac, dum hæ minuuntur, augentur ipsarum conjugatæ; uti mox demonstrabitur.

PROPOSITIO XXXI.

274. C*Onjugatæ diametri per ordinatas super iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.*

Ellipsis AKBL sint duæ quævis conjugatæ diametri AB, KL; ad quas demittantur ordinatæ EG, PQ,

PQ, ex verticibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum EF, PR; Dico, fore BG:AG::LQ:KQ.



Demonstratio. Ducatur ad diametrum EF ordinata AO; tum per punctum O agatur recta OS, parallela ipsi EG.

Jam vero CK ad CQ rationem habet compositam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ.

Atqui CK:CP::KL:PR::EG:AO;
& rursum CP:CQ::AO:OS;

Ergo CK ad CQ rationem habet compositam ex EG ad AO, & ex AO ad OS. Et quoniam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, sive etiam CE ad CO;

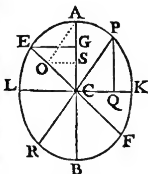
Ergo CK:CQ::CE:CO;
& convertendo, CK:KQ::CE:EO;
& sumptis antecedentium duplis, fiet
KL:KQ::EF:EO;
& dividendo, LQ:KQ::FO:EO.
Est autem FO:EO::BG:AG (*n.*267.);
Quamobrem BG:AG::LQ:KQ.
Quod erat &c.

DEFINITIO.

275. *Comparatio unius diametri ad suam conjugatam, vocatur* Conjugatio *diametrorum*.

PROPOSITIO XXXII.

276. *In ellipsi* ALBK *sint duae quaevis diametrorum conjugationes, nimirum*, AB, LK, & EF, PR; *ducanturque ex* E & P *rectae* EG, PQ, *ordinatim applicatae ad diametros* AB, LK; *Dico, quadratum ordinatae* EG *aequale esse rectangulo* KQL, & *quadratum ordinatae* PQ *aequale esse rectangulo* AGB.



Demonstratio. Ex Lemmate praecedenti,

$BG:AG::LQ:KQ$;

& componendo, $AB:AG::KL:KQ$;

& permutando, $AB:KL::AG:KQ$;

& rursum $AB:KL::BG:LQ$;

& compositis utriusque analogiae rationibus, erit

$\overline{AB}^2:\overline{KL}^2::AG\times GB:KQ\times QL$.

Jam vero ex natura ellipsis (*n*. 252.),

$\overline{AB}^2:\overline{KL}^2::AG\times GB:\overline{EG}^2::\overline{PQ}^2:KQ\times QL$;

Ergo $AG\times GB:KQ\times QL::AG\times GB:\overline{EG}^2$;

& consequenter $\overline{EG}^2=KQ\times QL$.

Quod erat primum.

Rursum ex superiori analogia,

$AG\times GB:KQ\times QL::\overline{PQ}^2:KQ\times QL$;

Ergo $\overline{PQ}^2=AG\times GB$.

Quod erat alterum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

277. *Axium quadrata simul sumpta, æqualia sunt quadratis cujuscunque conjugationis diametrorum, simul sumptis.*

Referant AB, KL axes ipsius ellipsis; & ordinatæ EG, PQ rectos cum iis angulos constituant; Dico, quadrata, quæ fiunt ex axibus AB, KL, æqualia esse quadratis, quæ fiunt ex aliis quibusvis conjugatis diametris EF, PR.

Demonstratio. $\overline{CA}^2 = AG \times GB + \overline{CG}^2$;

& $\overline{CK}^2 = KQ \times QL + \overline{CQ}^2$, ex Elem.;

Ergo duo quadrata ex CA & CK æqualia erunt duobus rectangulis AGB, KQL, unà cum duobus quadratis ex CG & CQ.

Atqui per præced., $\overline{PQ}^2 = AG \times GB$;

& $\overline{EG}^2 = KQ \times QL$;

Itaque his substitutis, erunt

$$\overline{CA}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{CQ}^2.$$

Est autem $\overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{CP}^2$;

& $\overline{EG}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CE}^2$, ex Elem.;

Ergo $\overline{CA}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CE}^2$;

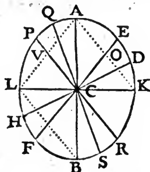
& consequenter quadrata ex totis AB, KL æqualia erunt pariter iis, quæ fiunt ex totis EF, PR. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIV.

278. *Iisdem stantibus, dum diametri minuuntur in recessu ab axe majore, vicissim conjugatæ ipsarum augentur.*

Sit AB axis major ellipsis, & KL axis minor, & EF diameter quævis, cujus conjugata diameter sit PR; Dico, non posse diametrum EF fieri minorem, nisi ipsius conjugata PR vicissim augeatur.

Demonstr. $\overline{AB}^2 + \overline{KL}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{PR}^2$, per præced.; Quamobrem excessus, quo AB quadratum superat EF quadratum, erit semper æqualis excessui, quo vicissim PR quadratum superat quadratum KL; hinc nequit excessus ille augeri, nisi iste pariter augeatur. Itaque, quando per recessum ab axe majore AB, minor evadit diameter EF, tunc augetur excessus, quo quadratum ipsius AB superat quadratum EF; Ergo in hoc ipso recessu necesse est, ut augeatur etiam excessus, quo quadratum ipsius PR superat quadratum KL; & propterea diameter PR major evadet. Constat itaque propositum.



Co-

Corollarium I.

279. *Axis major* AB *ad axem minorem* KL *habet majorem rationem, quàm diameter quævis alia* EF *ad ſuam conjugatam* PR.

Cum enim AB major ſit, quàm EF, habebit AB ad KL majorem rationem, quàm EF ad KL. Sed KL minor eſt, quàm PR; ac proinde EF majorem habet rationem ad KL, quàm ad PR; Ergo ratio, quam habet AB ad KL, multo major erit ratione, quam habet EF ad PR.

Corollarium II.

280. *Diameter quælibet* EF, *axi majori propinquior, majorem habet rationem ad ſuam conjugatam* PR, *quàm diameter* DH, *ab eodem illo axe remotior, ad conjugatam ſuam* QS.

Cum enim EF major ſit, quàm DH, habebit EF ad PR majorem rationem, quàm DH ad PR. Sed PR minor eſt, quàm QS; hinc DH majorem habet rationem ad PR, quàm ad QS; Ergo ratio, quam habet EF ad PR, multo major erit ratione, quam habet DH ad QS.

DEFINITIO.

281. Locus Geometricus *vocatur ſeries illa punctorum, lineam curvam, vel rectam efficientium, quibus alicui Problemati geometrico, indeterminate propoſito, ſatisfieri poteſt.*

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

282. *Locus omnium diametrorum ellipsis exhiberi potest per dati cujusdam circuli portionem.*

Referant itaque duæ rectæ AC, BC axes ellipsis, nimirum, AC axem majorem, & BC axem minorem; quibus junctis ad angulos rectos, super AB describatur semicirculus ACB; agaturque per punctum C recta CD, ipsi AB parallela, quæ occurrat circumferentiæ ad partem alteram in D; Dico, portionem ejusdem circumferentiæ CED, considerari posse, velut locum omnium diametrorum ellipsis.

Demonstratio. I. Quælibet ellipsis diameter debet esse minor axe majore AC, & major axe minore BC, vel AD; uti demonstratum est n. 272. Atqui omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad portionem circumferentiæ CED, minores sunt rectà AC, majores verò rectà AD; Ergo poterunt rectæ istæ, omnes ellipsis diametros exhibere.

II. Demonstratum est n. 277., quadrata ex bi-

A P D G E X Z T F C Q B H K I R S V

nis

nis ellipseos diametris conjugatis, simul sumpta, æqualia esse quadratis axium AC, BC. Sed, inclinatis ad punctum quodvis E ejusdem portionis circuli CED, rectis AE, BE, quadrata illarum, ex Elem., adæquant quadrata ipsarum AC, BC; Ergo, si AE referat diametrum aliquam, erit BE ejus conjugata. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVI.

283. *Rectangulum ex binis ellipseos diametris conjugatis eò majus evadit, quò magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedunt; & maximum est, ubi omnino inter se sunt æquales.*

Sicuti rectæ AC, BC referunt axes ellipsis, sic rectæ AE, BE repræsentent binas ejus diametros conjugatas; Dico, rectangulum $AE \times EB$ eò majus esse rectangulo $AC \times CB$, quò minus a se mutuo differunt duæ AE, EB; & maximum fieri, cum eædem AE, BE inter se sunt æquales.

Demonstratio. Demittantur super AB perpendiculares CF, EG. Itaque ex natura circuli,

$$\overline{CF}^2 : \overline{EG}^2 :: AF \times FB : AG \times GB.$$

Atqui hujusmodi rectangula sunt in ratione composita ex AF ad AG, & ex BF ad BG; Ergo in hac eadem composita ratione erit pariter quadratum CF ad quadratum EG.

Jam, assumpta communi altitudine AB, erit

$$AF : AG :: BA \times AF : BA \times AG;$$

sive, ex Elem., $:: \overline{AC}^2 : \overline{AE}^2$.

Et similiter, assumpta communi altitudine AB, erit

$$BF : BG :: AB \times BF : AB \times BG;$$

hoc est, ex Elem., $:: \overline{BC}^2 : \overline{BE}^2$.

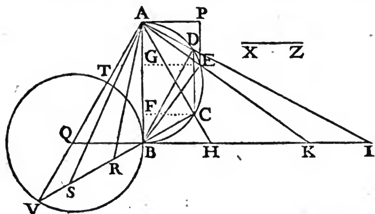
Ergo

Ergo quadratum CF ad quadratum EG habebit rationem compositam ex $\overline{AC}^2:\overline{AE}^2$, & ex $\overline{BC}^2:\overline{BE}^2$; hinc, capiendo latera omnium horum quadratorum, habebit quoque CF ad EG rationem compositam ex AC ad AE, & ex BC ad BE. Atqui duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum AC × CB ad rectangulum AE × EB; Itaque CF:EG::AC × CB:AE × EB. Ex quo facile constat propositi Theorematis veritas.

PROPOSITIO XXXVII.

284. *Isdem manentibus, summa ex binis diametris conjugatis* AE, BE, *eò major evadit, respectu summæ axium* AC, BC, *quò magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedunt; & maxima est, ubi omnino inter se sunt æquales.*

Demonstratio. Ex præced. Theor. rectangulum AE × EB, respectu rectanguli AC × CB, hac quidem lege augetur; Ergo etiam duplum illius rectanguli eadem lege augebitur, relate ad duplum istius;



& utrin-

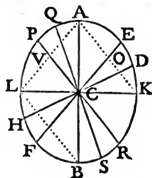
& utrinque addendo commune quadratum ex AB, eadem pariter erit lex incrementi quadrati ex AB $+ 2\, AE \times EB$, relate ad idem quadratum ex AB $+ 2\, AC \times CB$.

Quoniam autem $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$, erit ex Elem., AB quadratum, unà cum duplo rectangulo $AE \times EB$, æquale quadrato, quod fit ex summa ipsarum AE, BE. Et similiter, quia $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, erit AB quadratum, unà cum duplo rectangulo $AC \times CB$, æquale quadrato, quod fit ex summa ipsarum AC, BC.

Quamobrem necesse est, ut eadem illa lege augeatur quoque quadratum, quod fit ex summa ipsarum $AE + BE$, relate ad quadratum, quod fit ex ipsis $AC + BC$. Ergo eadem erit pariter lex, qua summa ex conjugatis diametris AE, BE augetur, relate ad summam axium AC, BC. Constat itaque propositum.

PROPOSITIO XXXVIII.

285. *In qualibet ellipsi I. dantur binæ diametri conjugatæ, æquales inter se; II. ad quas, quò magis accedunt binæ aliæ conjugatæ, eò minus a se mutuo differunt.*



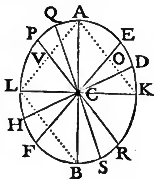
Ellipsis AKBL sit AB axis major, & KL axis minor. Jungantur subtensæ AK, AL; quibus bisectis in punctis O & V, agantur per hæc puncta diametri EF, PR. Dico I., *has diametros æquales esse inter se*.

De-

Demonstratio. Axis major AB secat ordinatas suas, non modo bifariam, verum etiam ad angulos rectos; Ergo idem axis dividet ellipsim in duas partes AKB, ALB, ita ut, unà alteri superimposità, mutuo congruant. Sed congruent etiam, tum subtensæ AK, AL, tum diametri EF, PR; Itaque binæ istæ diametri EF, PR æquales erunt inter se. Quod erat primum.

Quòd autem earumdem diametrorum EF, PR, altera alterius conjugata sit, facile ostenditur. Jungatur enim subtensa alia BL. Quoniam axes AB, KL bisecti sunt in centro C, duæ subtensæ AK, BL parallelæ erunt inter se. Est autem AV:VL:: AC:CB; Quare eadem BL parallela est quoque ipsi PR; hinc PR & AK parallelæ sunt inter se; & consequenter PR conjugata erit ipsius EF.

Dico II., *binas alias conjugatas diametros* DH, QS, *tantò minus a se mutuo differre, quò magis accedunt ad ipsas* EF, PR.



Nam ex demonstratis, si una DH minuatur in accessu ad EF, altera QS augebitur, accedendo ad PR. Et vicissim, si illa augeatur, hanc minui oportebit. Quod erat alterum.

De

De Parametris Diametrorum Ellipsis inter se mutuo comparatis.

SYNOPSIS.

Qua ratione duæ ellipsis diametri conjugatæ, continue proportionales sint cum suis parametris. Duæ conjugatæ diametri æquales habent parametros, & inter se, & diametris suis æquales. Et vicissim, diametri inæquales, habent parametros similiter inæquales. Ex diametris conjugatis illa, quæ major est, habet parametrum minorem diametro altera, ejusque parametro; illa, quæ minor est, parametrum habet majorem diametro altera, ejusque parametro. Si inæquales fuerint diametri, summa parametrorum major semper est summà diametrorum. Eadem Theoremata de parametris demonstrantur, etiamsi diametri non fuerint conjugatæ. Omnium parametrorum minima quidem est illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima verò illa, quæ refertur ad axem minorem. Hinc diametri cujusvis parameter in recessu ab axe majore, & in accessu ad minorem continuò augetur; maximumque incrementum subit in ipso axe minore. Hinc rursum ostenditur, parametrum minorem esse diametro, ad quam refertur, ab axe majore usque ad eum locum, in quo æqualitatis diameter reperitur; esse verò majorem ab eo loco usque ad axem minorem. Definitur locus, ad quem terminantur parametri omnium diametrorum ellipsis. Atque hinc demonstrantur Theoremata, quæ in comparatione parametrorum ellipsis locum habent.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

286. *DUæ ellipsis diametri conjugatæ, continue proportionales sunt cum suis parametris, ubi inverso ordine inter illas collocentur.*

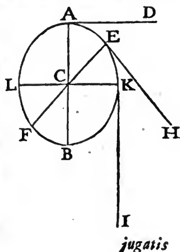
Ellipsis AKBL sint AB, KL binæ ejus diametri conjugatæ; sit autem AD parameter unius diametri AB, & KI parameter alterius KL. Dico, diametros AB, KL, inverso ordine positas inter suas parametros AD, KI, continuam cum eis proportionem constituere, hoc est,

.·.AD.KL.AB.KI.

Demonstratio. Quoniam KL est conjugata ipsius AB, erit ex definitione parametri, AD:KL::KL:AB. Et similiter, quoniam AB est conjugata ipsius KL, erit KL:AB::AB:KI. Ergo quatuor AD, KL, AB, KI continue proportionales erunt. Quod erat &c.

Corollarium.

287. HInc I., *si duæ conjugatæ diametri* AB, KL *inter se sint æquales, etiam parametri* AD, KI *debent esse æquales, tam inter se, quam cum diametris suis.*



II. Et vicissim, *si duæ conjugatæ diametri* AB, KL *sint inæquales, necesse est, parametros quoque* AD, KI *esse inæquales, tam inter se, quam cum qualibet earum diametrorum.*

III. *Ex diametris conjugatis*

jugatis AB, KL, *illa, quæ major eſt, habet parametrum minorem diametro altera, ejuſque parametro; illa vero, quæ minor eſt, parametrum habet majorem diametro altera, ejuſque parametro.*

IV. *Si inæquales fuerint diametri* AB, KL, *&* *proinde inæquales ipſarum parametri* AD, KI; *ſumma parametrorum major eſt ſemper ſummâ diametrorum.*

Monitum.

288. *QUòd ſi diametri non fuerint conjugatæ, poterit etiam de parametris ipſarum ferri judicium, præmiſſo hoc Lemmate.*

PROPOSITIO XL.

289. *IN ellipſi quadratum diametri cujuslibet, unà cum ejus figura, quæ inde oritur, eamdem ubique ſummam conſtituit.*

Nimirum, ſi ad quadratum diametri cujuſvis AB apponatur figura ejus, quæ conſtituitur per rectangulum DAB, quod vocavimus figuram diametri; Dico, ſummam inde confectam, fore ſemper eamdem; quocunque in loco capiatur diameter AB.

Demonſtratio. Si ad quadratum diametri AB adjiciatur quadratum, quod fit ex ejus conjugata KL, eadem ubique ſumma conficitur (*n.* 277.). Atqui quadratum ex KL eſt æquale rectangulo DAB (*n.* 193.); Ergo, ſi eidem AB quadrato apponatur rectangulum DAB, ſumma inde orta, pariter eadem ubique erit. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLI.

290. *Duæ quælibet ellipsis diametri sunt reciproce proportionales summis laterum suarum figurarum.*

Diametri AB parameter esto AD; & cujusvis alterius diametri EF parameter sit EH; Dico,

$$AB : EF :: EF + EH : AB + AD.$$

Demonstratio. Per Lemma, eadem summa oritur, tam si ad AB quadratum adjiciatur rectangulum DAB, quam si ad EF quadratum apponatur rectangulum HEF;

Ergo $\overline{AB}^2 + DA \times AB = \overline{EF}^2 + HE \times EF$.

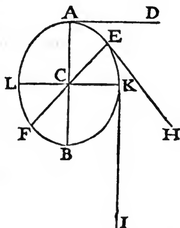
Atqui $\overline{AB}^2 + DA \times AB = AB \times \overline{AB + AD}$;

& $\overline{EF}^2 + HE \times EF = EF \times \overline{EF + EH}$;

Quare, cum æqualia inter se sint duo hæc rectangula, erit $AB : EF :: EF + EH : AB + AD$. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLII.

291. *Iisdem manentibus, ex duabus quibusvis diametris ellipsis, illa, quæ minor est, majorem parametrum habet.*



Esto diameter AB major diametro EF; Dico, parametrum AD diametri majoris, esse vicissim minorem parametro EH diametri minoris.

Demonstratio. Ex præced., diameter AB est ad diametrum EF, uti summa

ma ipsarum $EF + EH$, ad summam ex ipsis $AB + AD$; Quare, sicuti AB major est, quàm EF, per hyp.; ita duæ $EF + EH$ majores erunt duabus $AB + AD$. Parameter igitur EH, adsciscens suam diametrum EF, majorem summam constituit, quàm parameter AD, assumens diametrum suam AB. Atqui EF, per hyp., minor est, quàm AB; Ergo EH multo major erit, quàm AD. Quod erat &c.

Corollarium I.

292. QUemadmodum, uti demonstratum jam est, omnium diametrorum ellipsis maxima est axis major, minima vero axis minor; ita vicissim, ***omnium parametrorum minima quidem est illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem.***

Corollarium II.

293. SImiliter, sicuti diameter in recessu ab axe majore, & in accessu ad minorem continuò minuitur, maximamque patitur diminutionem, cum in ipsum axem minorem desinit; ita, versa vice, ***diametri parameter continuo augetur, maximumque incrementum subit in ipso axe minore.***

Corollarium III.

294. CUm autem ostensum sit n. 287., parametrum illius diametri, quæ conjugatam habet æqualem, adæquare diametrum suam; hinc denique infertur, ***parametrum minorem esse diametro, ad quam refertur, ab axe majore usque ad eum locum, in quo æqualitatis diameter reperitur; esse vero majorem, ab eo loco usque ad axem minorem.***

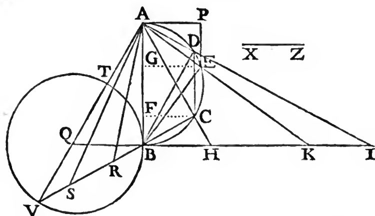
PROPOSITIO XLIII.

295. *DEfiniri poteſt locus, ad quem terminantur parametri omnium diametrorum ellipſis.*

Quemadmodum locum geometricum omnium diametrorum ellipſis exhibuimus per dati cujuſdam circuli portionem; ſic locus omnium parametrorum eſt portio rectæ lineæ, quæ ejus circuli circumferentiam in dato quodam puncto contingit.

Conſtructio. Rectæ AC, BC referant, ut prius, axes ellipſis, hoc eſt, AC axem majorem, & BC axem minorem; quibus junctis ad angulum rectum, deſcribatur ſuper AB ſemicirculus ACB; & ducatur per punctum C recta CD, ipſi AB parallela. Demonſtravimus ſupra, portionem CED fore locum omnium diametrorum ellipſis.

Jam, ſi ex puncto B erigatur ſuper AB perpendicularis BH, cum qua conveniat tum axis major AC in puncto H, tum axis minor AD in puncto I; recta BH tanget circumferentiam circuli in puncto B.



His

His animadverſis, ſicuti circumferentiæ portio CED eſt locus omnium diametrorum ellipſis, quia quælibet ellipſis diameter exhiberi poteſt per rectam, quæ ducitur ex puncto A ad eam portionem circuli; ita tangentis portio HI eſt locus, ad quem terminantur parametri omnium diametrorum ellipſis; ita ut, ſi AE fuerit diameter quævis, eademque protendatur ad occurſum tangentis in K, Dico, EK fore parametrum ipſius diametri AE.

Demonſtratur Problema, tam relate ad ipſos axes AC, AD, quam reſpectu cujuſvis diametri AE; dummodo retineatur, quod jam demonſtratum eſt n. 282., nimirum, conjugatam diametri AE, eſſe rectam alteram BE, ductam ad idem punctum E, ex termino altero B. Itaque

I. Triangulum ABH eſt rectangulum in B. Quare, cum ex angulo recto demiſſa ſit ſuper hypotenuſam AH perpendicularis BC; erit AC:BC::BC:CH. Atqui parameter axis majoris eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem majorem, & axem alterum minorem; Ergo CH eſt parameter axis majoris AC. Quod erat primum.

II. Eadem ratione, quoniam triangulum ABI habet angulum rectum in B, & ex angulo recto demiſſa eſt ſuper hypotenuſam AI perpendicularis BD; erit AD:BD::BD:DI. Atqui parameter axis minoris eſt tertia proportionalis poſt ipſum axem minorem, & axem alterum majorem; Ergo DI eſt parameter axis minoris AD. Quod erat ſecundum.

III. Denique, quia triangulum ABK eſt rectangulum in B, & ex angulo recto demiſſa eſt ſuper hypotenuſam AK perpendicularis BE; erit AE:BE::BE:EK. Sed parameter diametri AE eſt tertia proportionalis poſt ipſam diametrum AE, & ejus conjugatam; Itaque, cùm BE ſit conjugata diame-

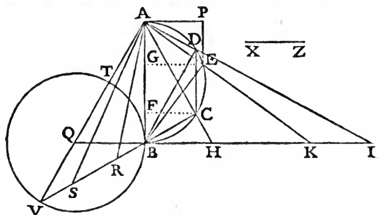
tri AE, erit EK parameter ejuſdem diametri AE. Quod erat tertium.

Corollaria.

296. HInc veritas eorum, quæ in comparatione parametrorum ellipſis locum habent, rurſum demonſtratur.

I. Protractis ſiquidem ad tangentem uſque BH, rectis omnibus, quæ ducuntur ex puncto A ad circumferentiam CED; perſpicuum eſt, ex portionibus ipſarum, quæ tangente, & circulo intercipiuntur, minimam quidem eſſe CH, maximam vero DI. Quare *parametrorum omnium ellipſis, minima quidem erit illa, quæ refertur ad axem majorem* AC, *maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem* AD.

II. Conſtat pariter, eaſdem illas portiones eò magis augeri, quò magis a puncto B removentur; atque adeo, quò minores ſunt rectæ, cum quibus jacent in directum. Itaque ſimiliter *parametri ellipſis tantò quidem majores erunt, quantò minores ſunt diametri, ad quas illæ referuntur.*



III.

III. Si duæ conjugatæ diametri AE, BE fuerint inter ſe mutuo æquales; utrique ipſarum æqualis quoque erit ipſa EK. Hinc rurſum liquet, *parametrum ejus diametri, quæ conjugatam habet æqualem, longitudine ſua, tum ipſam diametrum, ad quam refertur, tum ejus conjugatam, adæquare*.

IV. Quoniam tres rectæ AE, BE, EK ſunt continue proportionales; erit parameter EK minor, quàm AE, quoties diameter AE ſuperat diametrum BE; erit vero major, cum viciſſim BE ſuperat AE. Hinc rurſum oſtenditur, *ab axe majore uſque ad diametrum, quæ conjugatam habet æqualem, eſſe parametros minores ſuis diametris; eſſe vero majores ab ea diametro uſque ad axem minorem*.

V. Hinc etiam facile conſequitur veritas alterius Theorematis, quòd *duæ quævis ellipſeos diametri ſint reciproce proportionales ſummis laterum ſuarum figurarum*. Si enim AE referat ellipſis diametrum aliquam, hac protracta uſque ad tangentem BH, fiet EK parameter ipſius; unde AK erit ſumma laterum ſuæ figuræ, juxta notionem traditam n. 211. Atqui AK:AB::AB:AE; Ergo rectangulum, quod fit ex diametro AE in AK ſummam laterum ſuæ figuræ, æquale erit quadrato ipſius AB. Simili ratione demonſtrabitur, eidem quadrato AB æquale eſſe rectangulum, quod fit ex quavis alia diametro in ſummam laterum ſuæ figuræ; Ergo æqualia erunt inter ſe rectangula, quæ fiunt ex duabus quibuſvis diametris in ſummas laterum ſuarum figurarum; & propterea ſummis iſtis reciproce proportionales erunt ipſæ diametri.

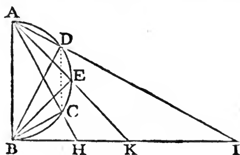
VI. Hinc etiam facili ratiocinio connectitur Theorema alterum de ſumma, & differentia laterum figuræ diametri. Nam quamvis ex hoc Theoremate jam conſtet, ſummam laterum figuræ diametri eò eſ-

se minorem, quò magis ipsa diameter accedit ad axem majorem; *differentia tamen eorundem laterum, eò minor evadit, quò magis diameter accedit ad eam, quæ & parametrum, & conjugatam habet æqualem.*

Esto enim AE diameter illa, cui æqualis est tum parameter EK, tum conjugata BE. Jamque ex demonstratis perspicuum est, parametros esse minores suis diametris, ab axe majore usque ad AE; & vice versa, esse majores ab AE usque ad axem minorem.

Quia verò in accessu ab axe majore ad ipsam AE, parametri quidem augentur, diametri vero minuuntur; hinc necesse est, ut in accessu isto decrescat differentia laterum figuræ. Sed decrescet quoque in accessu ab axe minore ad eamdem AE; quia vicissim diametri augentur, parametri vero diminuuntur..

Denique ob æquales AE, EK, liquet, differentiam laterum figuræ diametri, tum ab axe majore accedendo ad ipsam AE, tum ab axe minore accedendo ad eamdem AE, ita decrescere, ut evanescat.



De

De Tangentibus Ellipseos, cuicunque Diametro, & sibi mutuo occurrentibus.

ELlipseos proprietates omnes, quæ ad axes, focos, diametros, ac parametros pertinent, satis explicatas arbitror superioribus Elementis. Sequitur, ut theoriam tangentium hoc loco aggrediamur; non eam quidem ad duos axes restrictam, sive ad occursum axium, uti præstitimus n. 207. & 208., quantum satis tunc erat ad progrediendum; sed universalem, ad omne genus diametrorum extensam; quæque magno usui solet esse in curvarum natura penitius exploranda. Hinc omnes illæ æqualitates triangulorum, & trapeziorum, quas n. 230. & sequentibus, ex mutuo tangentium occursu deduximus, respectu axis, seu, ut vocant, diametri principalis, ad quaslibet diametros erunt traducendæ. Quò clarius Tironi constet universalitas doctrinæ, & mirifica, atque elegans diametrorum omnium cum axibus consensio.

SYNOPSIS.

IN quavis diametro producta ad occursum datæ tangentis, tres continue proportionales invenire. Et reciproce. Hinc ea Theoremata, respectu axis, & diametri, quæ n. 230. & sequentibus demonstrantur, locum habent quoque in duabus diametris; sive comparentur triangula a tangentibus, & diametris comprehensa, sive triangula, & quadrilatera constructa a lineis, quæ parallelæ sint tangentibus, ductæ a punctis perimetri ellipseos. Aliter tangentem ducere. Duæ tangentes sibi mutuo occurrentes, & a diametris oppositis terminatæ, secantur in eadem ratione. Duæ tangentes terminatæ in puncto occursus, eamdem cum suis ordinatis rationem habent.

PRO-

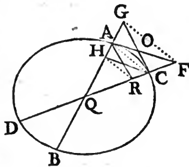
PROPOSITIO XLIV.

297. SI *a vertice* C *diametri* CD *ducatur tangens* CG, *quæ conveniat cum diametro altera* AB *in puncto* G, *& ab alternis diametrorum verticibus ducantur ordinatæ* CH, AR; *Dico, esse in proportione continua,* QG:QA::QA:QH.

Dem. Eſt enim (*n.* 274.) BH:HA::DR:RC;
& componendo, BA:HA::DC:RC;
ſumptiſque anteced. dimidiis, QA:HA::QC:RC;
& convertendo, QA:QH::QC:QR.
Atqui propter parallelas, QC:QR::QG:QA;
Ergo ex æquo QG:QA::QA:QH.
Quod erat &c.

PROPOSITIO XLV.

298. ET reciproce, *ſi a quovis puncto* C, *ſumpto in perimetro ellipſeos, ducatur ordinata* CH *ad diametrum* AB, *dein duabus rectis* QH, QA *accipiatur tertia proportionalis* QG, *jungaturque* CG; *Dico, rectam* CG *tangentem eſſe ellipſeos in puncto* C.



Dem. Eſt enim (*n.* 274.) BH:HA::DR:RC;
& componendo, BA:HA::DC:RC;
ſumptiſque anteced. dimidiis, QA:HA::QC:RC;
& convertendo, QA:QH::QC:QR.
Sed per hyp., QH:QA::QA:QG;
ſive QA:QH::QG:QA;
Ergo QG:QA::QC:QR.

Quare

Quare CG, parallela ipsi ordinatæ AR, tangens erit ellipsis in puncto C (*n.* 256.). Quod erat &c.

Corollarium I.

299. Datis duabus diametris AB, CD, earumque tangentibus AF, CG, quæ se intersecent, ac vicissim terminentur ab opposita diametro, ductisque a punctis contactuum ordinatis AR, CH; Dico, fore in proportione continua :: QH. QA.QG, & :: QR.QC.QF.

Corollarium II.

300. H*inc omnia ea, quæ complexi fuimus n.* 230., 231., 232., 233., 234., 235. *&* 241., *respectu diametri, & axis, locum habent in duobus diametris; & eodem modo demonstrantur, sive comparentur triangula* AOG, COF, *sive triangula* QGC, QAF, *sive triangula, & quadrilatera constructa a lineis, quæ parallelæ sunt tangentibus, ductæ a punctis perimetri ellipseos.*

PROPOSITIO XLVI.

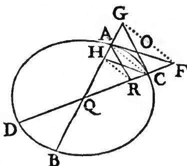
301. S*I a vertice* C *diametri* CD *ducatur tangens* CG, *quæ occurrat in puncto* G *diametro* AB, *& ordinata* CH; *Dico, rectangulum* $AH \times HB = QH \times HG$; *sive* AH:QH::HG:HB.

Et reciproce, *si* AH:QH::HG:HB; *Dico, rectam* CG *tangere ellipsim in puncto* C.

Demonstratur I. pars. Quoniam per præced., QG:QA::QA:QH, erit quadratum ex QA æquale rectangulo $QG \times QH$. Atqui quadratum ex QA est æquale rectangulo $AH \times HB$ + quadrato ex HQ; & rectangulum $QG \times QH$ æquatur rectangulo $GH \times HQ$ + quadrato ex HQ; Ergo, dempto

dempto utrinque communi quadrato ex HQ, remanet rectangulum $AH \times HB = GH \times HQ$; hoc est, AH:QH::HG:HB. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quoniam per hyp., $AH \times HB = QH \times HG$, addito utrinque communi quadrato ex HQ, fiet quadratum ex $QA = QG \times QH$; ac proinde QH:QA::QA:QG; & consequenter per præced., CG erit tangens. Quod erat alterum.



PROPOSITIO XLVII.

302. *Si ad duo quælibet ellipsis puncta* A & C *ducantur duæ tangentes* AF, CG, *quæ sibi mutuo occurrant in* O, *ac terminentur a diametris oppositis; Dico, eas tangentes in eadem ratione se se mutuo secare in puncto* O; *hoc est*,

AO:OF::CO:OG.

Demonstratio. Ducantur ab alternis diametrorum verticibus ordinatæ CH, AR. Erit (*n.* 274.).

QH:QA::QR:QC.

Jam vero propter tangentem CG, habebitur

QH:QA::QA:QG;

& rursum propter tangentem AF, erit

QR:QC::QC:QF;

Ergo QA:QG::QC:QF;

ac propterea, cum duo triangula AQF, GQC habeant circa angulum communem Q latera reciproce proportionalia, erunt inter se æqualia; hinc, dempto

pto communi trapezio AQCO, erit quoque triangulum AOG æquale triangulo COF; unde, cum duo iſta triangula habeant etiam angulum in O utrinque æqualem, habebunt latera circa æquales angulos reciproce proportionalia; hoc eſt,

AO:OF::CO:OG.

Quod erat &c.

PROPOSITIO XLVIII.

303. *Iſdem ſtantibus, ut in præcedenti conſtructione, Dico, tangentes duas* AO, CO *eamdem cum ordinatis* CH, AR *rationem habere; hoc eſt,*

AO:CO::CH:AR.

Demonſtratio. Eſt enim QR:QC::QH:QA. Sed propter triangula æquiangula QRA, QCG,

QR:QC::RA:CG;

pariterque propter triangula æquiangula QHC, QAF,

QH:QA::HC:AF;

Ergo HC:AF::RA:CG;

hoc eſt HC:RA::AF:CG.

Oſtendimus autem ſupra, AO:OF::CO:OG;

& addendo antecedentes ipſis conſequentibus, fiet

AO:AF::CO:CG;

hoc eſt, AO:CO::AF:CG.

Quamobrem, cum in eadem ratione rectarum AF, CG ſit tam AO, CO, quàm HC, RA, erit quoque AO:CO::CH:AR.

Quod erat &c.

De

De Axibus, Diametris, ac Parametris Ellipseos inveniendis.

SYNOPSIS.

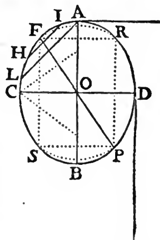
Data ellipsi, invenire suos axes, suos focos, & parametros axium. Et, datis axibus, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter se, vel, quæ datum rectangulum contineant, vel, quæ datam summam conficiant. Et rursum, datis axibus, invenire diametrum, quæ datam habeat parametrum, vel, quæ ad suam parametrum habeat datam rationem.

PROPOSITIO XLIX.

304. *Data ellipsi* ACBD, *invenire suos axes, suos focos, & parametros axium.*

Constructio, & Demonstratio. In data ellipsi ducantur duæ, aut plures lineæ parallelæ HI, LA &c., quarum quælibet dividatur bifariam; & per hæc puncta divisionum transeat recta FP, quæ proinde erit diameter; tum FP dividatur bifariam in O, quod erit centrum ellipsis.

Si centro O, & intervallo OF, vel OP, descriptus circulus tangit ellipsim, quin secet, diameter FP erit axis major. Nam circulus circumscriptus ellipsi, habet pro diametro axem majorem (*n.* 270.).



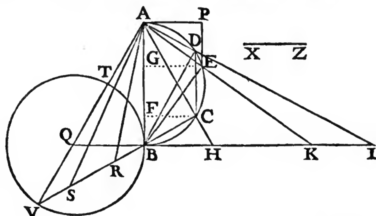
Sin

Sin autem idem circulus fecet ellipfim, fecabit utique in quatuor punctis F, R, P, S (*n.* 271.), æque diffitis a fummitate axium. Itaque, fi jungantur hæc puncta per rectas FR, RP, PS, SF, ac fingulæ bifariam dividantur, rectæ AB, CD, quæ per eadem divifionum puncta tranfeunt, erunt duo axes; quibus inventis, facile ex dictis invenientur duo foci, & parametri axium.

PROPOSITIO L.

305. **D**Atis *axibus ellipfis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter fe.*

Conftructio, & Demonftratio. Quoniam diametros omnes ellipfis in dati cujufdam circuli portione reperiri demonftravimus * n. 282.; hinc in eodem fchemate referant duæ rectæ AC, BC axes ellipfis, & AC axem majorem, & BC axem minorem. Jungantur ad angulum rectum ACB; tum fuper AB defcribatur femicirculus ACB; ducaturque recta CD, parallela ipfi AB. Perfpicuum eft ex dictis



* n. 282.,

n. 282., portionem circumferentiæ CED, locum eſſe omnium diametrorum ellipſis.

His præjactis, axis major ad axem minorem habet majorem rationem, quàm quævis alia diameter ad ſuam conjugatam (*n.* 279.); quare data ratio minor eſſe debet eà, quam habet AC ad BC. Fiat itaque primò AC ad CR in data illa ratione: erit CR major, quàm BC. Rurſum, ſi fiat BC ad AC, ut AC ad CS, erit CR minor, quàm CS.

Hinc, junctis rectis AR, AS, erit angulus ARC minor quidem angulo ABC, ſed major angulo ASC. Jam vero, ex Elem., triangula ABC, ACS ſunt æquiangula, propter latera circa angulum rectum communem proportionalia; quare angulus ASC = angulo BAC, ſive ABD; ac proinde idem angulus ARC, ſicuti minor eſt angulo ABC, ſic major erit angulo ABD. Fiat itaque angulus ABE = angulo ARC: recta BE cadet inter duas BC, BD, & terminabitur ad portionem circumferentiæ CED.

Atque hinc conſequitur, duas rectas AE, BE

eſſe

esse diametros conjugatas ejus ellipsis, cujus axes sunt rectæ AC, BC. Et quoniam ob triangula æquiangula AEB, ACR, est AE:BE::AC:CR, nimirum, in data ratione; patet, diametros conjugatas AE, BE satisfacere conditionibus Problematis.

PROPOSITIO LI.

306. D*Atis axibus, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.*

Duæ rectæ AC, BC referant axes ellipseos; & iisdem, ut supra, peractis, sit circumferentiæ portio CED locus omnium diametrorum ellipsis. Et quoniam (*n.* 283.) rectangulum sub binis ellipseos diametris conjugatis eò majus evadit, quò magis ipsæ diametri accedunt ad eas, quæ inter se sunt æquales; hinc datum rectangulum, nec minus esse debet eo, quod sub axibus continetur, nec majus illo, quod conjugatæ æquales comprehendunt.

Demonstratio. Demissa super AB, perpendiculari CF, rectangulum sub axibus $AC \times BC = AB \times CF$. Nam triangula ABC, BCF sunt similia; adeoque AB:AC::BC:CF. Rursus, quia diametri conjugatæ æquales sub eo circumferentiæ puncto reperiuntur, quod bifariam dividit portionem CED ejusdem circumferentiæ; hinc rectangulum sub ipsis contentum, ob eamdem rationem, erit æquale rectangulo, quod fit ex AB in EG radium circuli. Ergo datum rectangulum, nec minus esse debet eo, quod fit ex $AB \times CF$, nec majus illo, quod fit ex AB in sui semissem. Hinc, si datum rectangulum æquale ponatur ei, quod fit ex AB in rectam XZ; erit recta ista XZ major, quàm CF, & minor semisse ipsius AB. Quamobrem, si ex puncto A erigatur super AB perpendicularis $AP = XZ$, & per punctum

P P du-

P ducatur recta PE, parallela eidem AB; hæc secabit portionem CED in puncto aliquo E. Jungantur rectæ AE, BE; Dico, rectas istas exhibere nobis quæsitas diametros. Nam, propter triangula æquiangula ABE, AEP, erit

$$AB : BE :: AE : AP = XZ;$$

Ergo $AE \times BE = AB \times XZ$. Quod erat &c.

PROPOSITIO LII.

307. *Datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam summam conficiant.*

Hoc Problema facile ad præcedens reducitur, si quid in data conditione lateat, evolvatur. Nam, si data est summa diametrorum, dabitur etiam quadratum, quod fit ex eadem summa; hoc autem æquatur quadratis diametrorum, unà cum rectangulo bis sub ipsis diametris contento; hæc itaque simul sumpta, similiter dantur.

Rursus, quadrata diametrorum simul sumpta, datam summam constituunt, nimirum, eamdem, quam exhibent quadrata axium (*n.* 277.); Ergo constituet

A P D X Z G E T F C Q B H K I R S V

pari-

pariter datam ſummam duplum rectanguli, quod ſub ipſis diametris continetur; Quare datum quoque erit hoc rectangulum; & propterea propoſitum Problema eò reducetur, ut, *datis axibus ellipſis, inveniantur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum contineant.*

Notabis autem, conditioni hujus Problematis eoſdem limites oportere conſtitui, quos in præcedenti expoſui. Nam, quemadmodum, cum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant, oportet, ut rectangulum datum, nec ſit minus eo, quod continetur ſub axibus, nec majus illo, quod fit ex diametris conjugatis æqualibus; ita quoque, cum inveniendæ ſunt duæ diametri conjugatæ, *quæ ſimul datam rectam adæquent*, neceſſe eſt, ex demonſtratis, *ut recta data, nec ſummà axium ſit minor, nec major ſummà conjugatarum æqualium.*

PROPOSITIO LIII.

308. D*Atis axibus ellipſis, invenire diametrum, quæ datam habeat parametrum.*

Manentibus omnibus, ut ſupra, erigatur ſuper AB perpendicularis BQ, quæ ſemiſſem datæ parametri adæquet; tum junctà AQ, deſcribatur centro Q, & intervallo QB, circuli circumferentia, cui ipſa AQ occurrat in punctis T & V; denique in angulo ABH applicetur recta $AK = AV$; Dico, rectam AE eſſe diametrum quæſitam.

Demonſtratio. Nam quadrato AB tangentis æquatur, ex Elem., rectangulum $VA \times TA$, ſub tota ſecante, & ejus parte exteriori comprehenſum. Rurſus eidem quadrato AB æquatur aliud rectangulum $EA \times AK$; nam triangula ABE, ABK ſunt ſi-

milia. Ergo $EA \times AK = TA \times AV$; & propterea $AK : AV :: AT : AE$. Sed ex conſtr., $AK = AV$; hinc $AT = AE$; & conſequenter $EK = TV$. Sed TV, cum ſit dupla ipſius BQ, datam parametrum adæquat; Ergo eidem parametro æqualis quoque erit ipſa EK; Itaque AE erit diameter quæſita. Quod &c.

Ut autem propoſitum Problema reſolvi poſſit, neceſſe eſt, ut conſtituantur limites, ac *data parameter, nec minor ſit parametro axis majoris, nec major parametro axis minoris;* cum demonſtratum aliunde ſit, parametrorum omnium ellipſis minimam quidem eſſe illam, quæ refertur ad axem majorem AC; maximam vero eſſe eam, quæ refertur ad axem minorem AD.

PROPOSITIO LIV.

309. D*Atis axibus ellipſis, invenire diametrum, quæ ad ſuam parametrum habeat datam rationem.*

Omnibus, ut ſupra, ſtantibus, ſecetur AB in G, hac lege, ut AG ad GB ſit in data illa ratio-

ne.

ne. Erecta subinde perpendiculari GE, ad circumferentiam usque, fiet AE diameter quæsita. Est enim AE:EK::AG:GB. Quod erat &c.

Datæ autem rationi limites sunt constituendi, ut Problema resolvi possit. Cum enim diametrorum omnium ellipsis, maxima quidem sit axis major, minima vero axis minor; parametrorum autem minima sit illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero illa, quæ pertinet ad axem minorem; hinc evidenter consequitur, rationem cujusvis diametri ad suam parametrum, tum minorem esse illà, quam habet axis major ad parametrum suam, tum majorem esse debere illà, quam habet axis minor ad parametrum suam; unde data ratio hisce terminis contineatur oportet.

De Secantibus Ellipseos.

EXpositis tangentium proprietatibus præcipuis, reliquum est, ut eas persequamur, quæ pertinent ad secantes ellipseos; ac demonstremus, quam rationem habeant inter se rectangula contenta sub segmentis duarum rectarum, quæ sibi mutuò occurrunt, & utrinque ad ellipsim terminantur. Hìc enim vero varii casus sunt distinguendi, pro diversa qualitate rectarum occurrentium.

SYNOPSIS.

QUam rationem habeant rectangula sub segmentis;

I. *Cum secantes sunt diametri ellipsis;*

II. *Cum ex secantibus una quidem est diameter, & altera est ejus ordinata;*

III. *Cum duæ secantes sunt ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur;*

IV. *Cum duarum secantium una est diameter, & alia ordinata alterius diametri;*

V. *Cum secantes sunt ordinatæ duarum quarumvis diametrorum.*

PROPOSITIO LV.

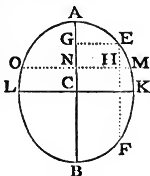
310. *SI rectæ sibi mutuò occurrentes, sint binæ diametri ellipsis; Dico, rectangulum sub segmentis unius, ad rectangulum sub segmentis alterius, esse in duplicata ratione ipsarum diametrorum.*

Sint enim AB, KL duæ quævis ellipsis diametri, quæ sibi mutuò occurrunt in ipso centro C; Dico, $AC \times BC : KC \times LC :: \overline{AB}^2 : \overline{KL}^2$.

Demonstratio. Nam, cum utraque diameter sit secta bifariam in centro, erit

$$AB:KL::AC:KC::BC:LC.$$

Sed rectangulum $AC \times CB$ ad rectangulum $KC \times CL$ est in ratione composita ex AC ad KC, & ex BC ad LC; Quare ratio eorumdem rectangulorum duplicata erit diametrorum AB, KL. Quod erat &c.



PROPOSITIO LVI.

311. *SI ex rectis sibi mutuò occurrentibus, una quidem sit diameter, & altera sit ejus ordinata; Dico, rectangulum sub segmentis prioris rectæ, ad rectan-*

ctangulum sub segmentis alterius rectæ, esse in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad suam conjugatam.

Sit enim AB diameter aliqua ellipsis, cujus KL sit conjugata; sitque etiam MO una ex ordinatis ad eamdem, cui occurrens in puncto N, utrinque ad ellipsim terminetur; Dico,

$$AN \times NB : MN \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{KL}^2.$$

Demonstratio. Nam recta MO bifariam secta est in puncto N; quare erit MN quadratum $=$ MN $\times$ NO; ac propterea erit, ut rectangulum AN $\times$ NB ad rectangulum MN $\times$ NO; ita idem rectangulum AN $\times$ NB ad quadratum ex MN. Atqui (*n.* 252.) rectangulum AN $\times$ NB est ad MN quadratum, uti AB quadratum ad KL; Ergo

$$AN \times NB : MN \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{KL}^2.$$

Quod erat &c.

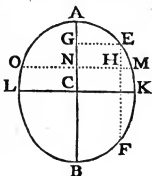
PROPOSITIO LVII.

312. *Si rectæ sibi mutuò occurrentes, sint ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referantur; Dico, rectangulum sub segmentis unius, ad rectangulum sub segmentis alterius, esse in ratione duplicata reciproca ipsarum diametrorum.*

Sint namque AB, KL duæ ellipsis diametri conjugatæ; sitque etiam MO ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL; quæ utrinque ad ellipsim terminatæ, sibi mutuò occurrant in puncto H; Dico, $MH \times HO : EH \times HF :: \overline{KL}^2 : \overline{AB}^2$.

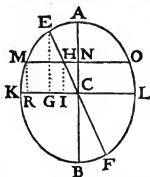
Demonstratio. Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Quoniam (*n.* 252.) KL quadratum, est ad AB quadratum, uti MN qua-

dratum ad rectangulum AN × NB; & æque, uti EG quadratum, ad rectangulum AG×GB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum; ita differentia quadratorum MN, EG, ad differentiam rectangulorum AN × NB, AG × GB. Cum autem EG=NH, erit ex Elem., differentia quadratorum MN, EG, æqualis rectangulo MH ×HO. Pariter, cum rectangulum AN×NB æquale sit differentiæ quadratorum CA, CN, & rectangulum AG×GB æquale differentiæ quadratorum CA, CG; hinc differentia rectangulorum AN × NB, AG ×GB, æqualis erit differentiæ quadratorum CG, CN; quæ tantundem valet, ac rectangulum EH × HF. Ergo $\overline{KL}^2 : \overline{AB}^2 :: MH \times HO : EH \times HF$. Quod erat &c.



PROPOSITIO LVIII.

313. *Si ex duabus rectis sibi invicem occurrentibus, una sit diameter, & alia sit ordinata alterius diametri; Dico, rectangulum sub segmentis illius, ad rectangulum sub segmentis hujus, esse, ut quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri.*



Esto enim AB aliqua ellipsis diameter, cujus conjugata sit KL, & MO sit una

ex

ex ejus ordinatis, utrinque ad ellipſim terminata; ſit præterea EF diameter alia, quæ ſecet ordinatam prioris MO in puncto H; Dico,

$$EH \times HF : MH \times HO :: \overline{EF}^2 : \overline{KL}^2.$$

Demonſtratio. Ex punctis E, H, M ducantur rectæ EG, HI, MR, parallelæ ipſi AB, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R.

Ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit

$$\overline{CG}^2 : \overline{CI}^2 :: \overline{EG}^2 : \overline{HI}^2 = \overline{MR}^2.$$

Atqui $\overline{EG}^2 : \overline{MR}^2 :: KG \times GL : KR \times RL$;

Ergo $\overline{CG}^2 : \overline{CI}^2 :: KG \times GL : KR \times RL$.

Hinc conjungendo terminos prioris rationis cum terminis ſecundæ, erit quoque

$$\overline{CG}^2 : \overline{CI}^2 :: \overline{KC}^2 : KR \times RL + \overline{CI}^2.$$

Atqui $\overline{CG}^2 : \overline{CI}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{CH}^2$;

Ergo $\overline{CE}^2 : \overline{CH}^2 :: \overline{KC}^2 : KR \times RL + \overline{CI}^2$.

Atque hinc per converſionem rationis, erit ulterius

$$\overline{CE}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CH}^2 :: \overline{CK}^2 : \overline{CK}^2 - KR \times RL - \overline{CI}^2.$$

Hoc autem ſecundum conſequens tantundem valet ex Elem., ac $\overline{CR}^2 - \overline{CI}^2$; & proinde

$$\overline{CE}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CH}^2 :: \overline{CK}^2 : \overline{CR}^2 - \overline{CI}^2.$$

Sed $\overline{CE}^2 - \overline{CH}^2 = EH \times HF$;

& $\overline{CR}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{HN}^2 = MH \times HO$;

Ergo $\overline{CE}^2 : EH \times HF :: \overline{CK}^2 : MH \times HO$;

& perm., $\overline{CE}^2 : \overline{CK}^2$,

ſive $\overline{EF}^2 : \overline{KL}^2 :: EH \times HF : MH \times HO$.

Quod erat &c.

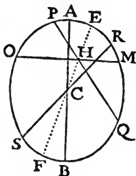
PRO-

PROPOSITIO LIX.

314. *SI duæ rectæ sibi mutuò occurrentes, sint ordinatæ duarum diametrorum, quæ inter se nequaquam sint conjugatæ; Dico, rectangula contenta sub segmentis ipsarum, esse, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.*

Sint enim AB, RS duæ quævis ellipsis diametri; sitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS; conveniant autem inter se duæ istæ ordinatæ in puncto H; Dico, $MH \times HO : PH \times HQ ::$ quadratum, quod fit ex conjugata diametri AB : quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Demonstratio. Ducatur per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam EF secat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit (*n.* 311.) rectangulum $EH \times HF$ ad rectangulum $MH \times HO$, uti quadratum ipsius EF ad quadratum conjugatæ alterius diametri AB. Rursum, cum eadem diameter EF secet similiter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum $EH \times HF$ ad rectangulum $PH \times HQ$; ita quadratum EF ad quadratum conjugatæ diametri RS. Ergo, ut rectangulum $MH \times HO$ ad rectangulum $PH \times HQ$; ita quadratum ex conjugata diametri AB, ad quadratum ex conjugata diametri RS. Quod erat &c.



De

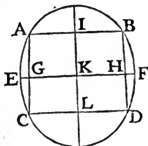
De Sectoribus, & Segmentis Ellipseos.

SYNOPSIS.

IN omni segmento maximum triangulum habet verticem in diametro dividente bifariam basim illius. Hinc tam segmentum, quam triangulum bifariam ab eadem diametro dividitur; & proinde a quavis diametro ellipsis bifariam dividitur. Definire lineas, quæ abscindunt segmenta æqualia, vel, quæ conjungunt segmenta æqualia. Si recta linea sectores æquales, hinc inde a diametro sumptos, conjungat, est tangenti parallela. Ex dato puncto auferre segmentum æquale dato segmento. Omnes diametri conjugatæ ellipsim quadrifariam dividunt; & reciproce, diametri ellipsim quadrifariam dividentes, sunt conjugatæ. Sectores ad verticem oppositi, sunt æquales. Diametri proportionaliter secantur a lineis auferentibus segmenta æqualia.

PROPOSITIO LX.

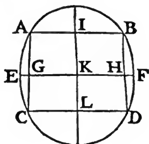
315. *SI duas parallelas in ellipsi jungant duæ rectæ, quas secet alia parallela; hujus sagittæ æquales erunt.*



Parallelas AB, CD jungant duæ lineæ AC, BD, quas secet alia parallela EF; Dico, rectas EG, HF, quas voco sagittas, fore æquales.

Demonstratio. Divisis rectis

ctis A B, C D bifariam in I & L, ducatur diameter I L, quæ omnes ordinatas, ipsamque E F bifariam dividet; Ergo K E = K F; ablatisque æqualibus K G, K H, supererit E G = H F. Quod erat &c.



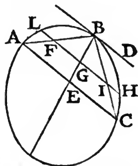
PROPOSITIO LXI.

316. *In omni segmento maximum triangulum habet verticem in diametro dividente bifariam basim illius. Et tam segmentum, quam triangulum bifariam ab eadem diametro dividitur.*

Esto segmentum A B C, cujus basis A C bifariam dividatur in E a diametro B E; Dico, triangulum A B C esse maximum, quod intra tale segmentum inscribi possit.

Demonstratio. Ducatur tangens B D. I. Cum omnia alia triangula non attingant tangentem B D, quæ est parallela lineæ A C, minora erunt triangulo A B C. Quod erat primum.

II. Certum est, omnes lineas, basi A C parallelas, dividi bifariam a diametro; certum est pariter, sagittas L F, I H æquales esse; quod de aliis omnibus ostendi potest; Ergo & segmenta A L B, B H C, & triangula A E B, C E B sunt æqualia. Quod erat alterum.



PRO-

PROPOSITIO LXII.

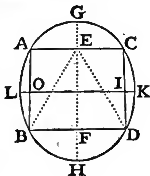
317. *IN Ellipsi lineæ conjungentes parallelas, abscindunt segmenta æqualia.*

Et viciſſim, *ſi ſegmenta fuerint æqualia, rectæ, quæ hiſce lineis conjunguntur, ſunt parallelæ.*

Caſus I.

PRoponantur lineæ AB, CD, conjungentes parallelas AC, BD; Dico, ſegmenta ALB, CKD eſſe æqualia.

Demonſtratio. Diviſis rectis AC, BD bifariam in F & E, ducatur EF, quæ erit diameter, dividetque totam ellipſim bifariam. Pariter ſegmenta AGC, BHD dividuntur bifariam; nam, ſi ducerentur quotlibet applicatæ in ſegmento AGC, vel BHD, ſingulæ bifariam a diametro dividerentur; Ergo & totum ſegmentum, juxta methodum indiviſibilium, vel evaneſcentium. Similiter triangula BEF, FED, ſuper æqualibus baſibus BF, FD, ſunt æqualia; uti & triangula ABE, EDC. Quibus omnibus, hinc atque inde, ſublatis, reſtant ſegmenta ALB, CKD æqualia. Quod erat &c.

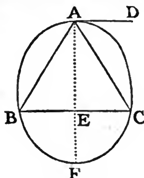


Aliter, & brevius. Per Lemma, ſagittæ LO, IK, & aliæ quæcunque, ſunt æquales; Ergo & ſegmenta AB, CD, quæ in hujuſmodi ſagittas reſolvi poſſunt, erunt æqualia.

Ca-

Casus II.

Lineæ AB, AC conjungant lineas BC, AD parallelas; hoc est, tangens AD parallela sit lineæ BC; Dico, segmenta AB, AC esse æqualia.

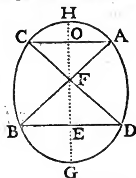


Demonstratio. Nam, si dividatur recta BC bifariam in E, linea AE erit diameter (*n.* 250.), dividetque bifariam ellipsim, segmentum BFC, & triangulum BAC; quibus, hinc atque inde, sublatis, restant segmenta æqualia AB, AC. Quod erat &c.

Casus III.

Denique lineæ AB, CD conjungant parallelas AC, BD, ea ratione, quæ exhibetur in figura; Dico, segmenta ACB, DAC esse æqualia.

Demonstratio. Dividatur BD bifariam in E, ducaturque EF. Ostendam facile, parallelam alteram AC dividi bifariam in O. Nam propter similitudinem triangulorum, AO:BE::OF:FE; & CO:ED::OF:FE. Cùm verò BE=ED; etiam CO=AO. Quamobrem OE erit diameter, dividens ellipsim æqualiter, sicut & segmentum BGD, & triangulum BFD; quibus sublatis, restant DFH, BFH æqualia;



& utrin-

& utrinque additis segmentis æqualibus CFH, AFH, fiunt segmenta CAD, ACB æqualia. Quod erat &c.

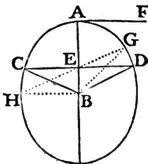
Propositiones conversæ hujus Theorematis, nempe, si *segmenta fuerint æqualia, rectas, quæ bis lineis conjunguntur, fore parallelas*, facile probari possunt in omni casu. Nam, si parallelæ non essent, ductis parallelis, fierent alia segmenta æqualia; & pars, & totum æqualia essent.

PROPOSITIO LXIII.

318. *Recta linea, sectores æquales, hinc inde a diametro sumptos, conjungens, est tangenti parallela.*

Sint sectores æquales ABC, ABD; Dico, lineam CD esse tangenti AF parallelam.

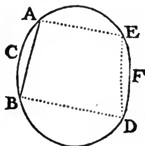
Demonstratio. Si enim non esset parallela tangenti, seu, quod eòdem recidit, non esset ordinatim applicata, esto alia quævis HEG. Segmenta itaque GAE, HAE essent æqualia; omnes enim parallelæ ipsi ordinatæ HEG, dividerentur bifariam. Pariter triangula HBE, BEG, habentia eumdem verticem, & bases æquales, essent æqualia, contra suppositionem.



PRO-

PROPOSITIO LXIV.

319. D*Ato segmento* ABC, *datoque in peripheria quovis puncto* D, *oporteat ex* D *rectam ducere* DE, *quæ auferat segmentum* DEF, *æquale segmento* ABC.



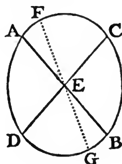
Resolutio. Jungatur BD; & ex A ducatur AE, parallela ipsi BD. Patet ex n. 317., segmentum DEF æquale esse segmento ABC. Quod erat &c.

PROPOSITIO LXV.

320. D*Iametri duæ conjugatæ ellipsim quadrifariam dividunt*.

Et reciproce, *diametri ellipsim quadrifariam dividentes*, *sunt inter se conjugatæ*.

Sint in ellipsi ABC diametri duæ conjugatæ AB, CD; Dico I., illas ellipsim quadrifariam dividere.



Demonstratio. Quoniam AB, CD diametri sunt conjugatæ, erit AB ordinatim applicata ad diametrum DC; unde tam AEC, CEB, quàm AED, BED sectores sunt æquales; omnes enim parallelæ ipsi ordinatæ AB, dividuntur bifariam. Sunt autem & AEC, AED sectores ob eamdem rationem æ-

quales;

quales; Sectores igitur quatuor sunt æquales; Itaque &c. Quod erat primum.

Si vero diametri AB, CD ellipsim quadrifariam dividant; Dico II., illas esse conjugatas.

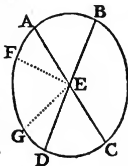
Demonstratio. Nam, si non essent, ducatur ipsi CD conjugata diameter FG. Igitur sector FEC quadrans esset ellipseos, per primam partem hujus; quod fieri nequit, cum sector AEC, ex hypothesi, sit quarta pars ellipseos. Itaque &c. Quod erat alterum.

PROPOSITIO LXVI.

321. *Sectores ad verticem oppositi, sunt æquales.*

Ellipsim ABC secent diametri quæcunque AC, BD; Dico, sectores ad verticem oppositos, inter se æquales esse.

Demonstratio. Ex centro E ducantur diametri duæ EF, EG; & EF quidem conjugata sit ipsi EB; EG vero conjugata ipsi AE. Quoniam igitur sectores BEF, AEG æquales sunt, per præced.; hinc, dempta communi parte AEF, erit sector AEB æqualis sectori FEG. Rursum, cum sectores FED, GEC sint æquales, dempta communi parte DEG, erit sector DEC=FEG=AEB sectori ad verticem opposito. Eodem modo ostenduntur AED, BEC sectores æquales. Igitur &c.



PROPOSITIO LXVII.

322. *Diametri proportionaliter secantur a lineis auferentibus segmenta æqualia.*

Ellipsim ACB secent duæ quævis lineæ AB, DE, auferentes segmenta æqualia. Divisis autem AB, DE bifariam in G & H, ducantur per G & H diametri IGC, IHF; Dico, has diametros in G & H proportionaliter esse divisas; nimirum, CG:GI::FH:HI. Et reciproce, si diametri sint proportionaliter divisæ; Dico, segmenta esse æqualia.

Demonstratio. Jungantur AD, BE, AC, DF, GH, CB, FE, CF. Quoniam ACB, DFE segmenta ponuntur æqualia, erunt AD, BE parallelæ (*n*. 317.). Quia vero rectæ AB, DE sectæ sunt bifariam in G & H, erit AG:GB::DH:HE; Igitur & GH, AD sunt parallelæ (*n*. 317.). Jam vero, cùm AB sit ordinata ad diametrum IC, erunt segmenta AGC, BGC æqualia (*n*. 317.), adeoque segmentum AGC dimidium totius ACB; similique de causa segmentum DFH dimidium est segmenti DFE. Quare, cùm tota segmenta ACB, DFE ponantur æqualia, etiam eorum dimidia AGC, DFH æqualia inter se erunt.

Deinde triangula ACB, DFE maxima sunt eorum, quæ segmentis inscribi possunt (*n*. 316.), & inter se æqualia, propter parallelas AD, BE, ut demonstratum est; Itaque æquabuntur etiam eorum dimidia triangula AGC, DFH; quæ, si auferas a segmentis æqualibus AGC, DFH, remanent segmenta æqualia AC, DF. Ergo recta CF parallela est ipsi AD, hoc est, ipsi GH; Quamobrem CG:GI::FH:HI. Quod erat primum.

Veritas conversæ fit manifesta ex prima parte.

De

De Ellipsibus similibus, earumque Segmentis.

SYNOPSIS.

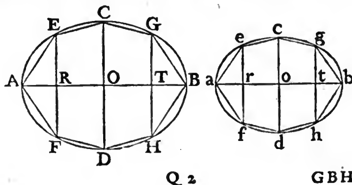
DEscribere ellipsim, alteri datæ similem, & super data recta. Non omnes ellipses inter se similes. Duo segmenta proportionalia abscindere. Duo segmenta proportionalia, quorum bases sint æquales, se habent, uti altitudines; &, si eorum altitudines fuerint æquales, se habent, uti bases; &, si altitudines fuerint basibus reciprocæ, segmenta erunt æqualia.

PROPOSITIO LXVIII.

323. *SUper data recta* ab *ellipsim describere, similem alteri datæ* ACBD.

Axi majori AB, & minori CD, & datæ rectæ *ab* inveniatur quarta proportionalis *cd*; tum pro axe majore quæsitæ ellipseos accipiatur *ab*, & *cd* pro minore; describaturque ellipsis, uti docuimus n. 191. & 192.; Dico, hanc fore similem datæ.

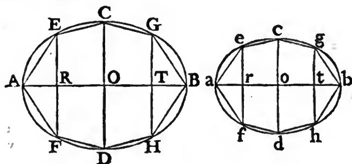
Demonstratio. Dividatur axis AB in quotvis partes, in punctis R, T &c.; ductisque ordinatis FE, HG &c., inscribatur figura rectilinea AEC



GBHDF; tum dividatur rursus axis *ab* in totidem partes proportionales partibus axis AB, in punctis *r*, *t* &c.; ductisque ordinatis *fe*, *bg* &c., inscribatur figura rectilinea *aecgbbdf*; quæ erit similis figuræ inscriptæ AECGBHDF.

Nam triangula AFE, *afe* exhibent AR:*ar*:: FE:*fe*. Ratio est, quia FE:*fe*::CD:*cd*; & CD:*cd*::AB:*ab*::AR:*ar*; Ergo hæc duo triangula erunt similia.

Eodem modo demonstrabitur, similes esse trapezoides FECD, *fecd*, & DCGH, *dcgb*, & triangula HGB, *bgb*. Quare duæ ellipses, figuris hisce similibus compositæ, inter se quoque erunt similes. Quod erat &c.



Corollarium.

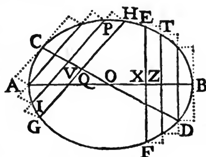
324. Cum necesse non sit, ut in qualibet ellipsi ratio minoris axis ad majorem sit semper eadem; hinc sequitur, non omnes ellipses esse inter se similes; & ut tales efficiantur, opus est, ut minores axes proportionales sint majoribus. Nam hac conditione semel posita, omnes reliquæ lineæ, uti distantia focorum, parametri &c., evadunt proportionales.

PRO-

PROPOSITIO LXIX.

325. *SI duæ diametri* AB, CD *secentur proportionaliter in punctis* X, Q, *hac lege, ut* XB : XA :: CQ : QD; *Dico, segmenta* EBF, GCH *esse proportionalia.*

Demonst. Quoniam BX : XA :: CQ : QD,
erit quoque BX : BA :: CQ : CD,
& XA : BA :: QD : CD;
& multiplicatis utrinque terminis harum duarum proportionum, fiet $BX \times XA : \overline{BA}^2 :: CQ \times QD : \overline{CD}^2$;
sive $BX \times XA : CQ \times QD :: \overline{BA}^2 : \overline{CD}^2$.



Concipiatur jam diametri portio XB divisa in plures partes æquales, & similiter CQ divisa in parem numerum partium æqualium, quæ proinde erunt proportionales partibus ipsius XB. Itaque habebitur pariter $BZ \times ZA : CV \times VD :: \overline{BA}^2 : \overline{CD}^2$;
Ergo $BX \times AX : CQ \times QD :: BZ \times ZA : CV \times VD$;
sive $BX \times AX : BZ \times ZA :: CQ \times QD : CV \times VD$.
Si vero rectangulis substituantur quadrata ordinatarum, quæ sunt in eadem ratione, fiet

$$\overline{EX}^2 : \overline{TZ}^2 :: \overline{QH}^2 : \overline{VP}^2;$$

Ergo EX : TZ :: QH : VP.

Cum autem hæc analogia conveniat ordinatis omnibus, quæ utrinque eodem modo ducantur; hinc constat, proportionalia esse segmenta GCH, FEB. Quod &c.

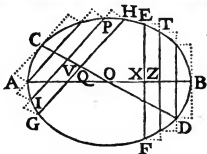
PROPOSITIO LXX.

326. *SI duorum ſegmentorum proportionalium baſes* FE, GH *fuerint æquales, ſegmenta erunt inter ſe, uti eorum altitudines* BX, CQ.

Demonſtratio. Dividantur altitudines BX, CQ in eumdem numerum infinite parvarum partium æqualium, & proportionalium, quarum diſtantia inter ſe ſit datà quavis minor; ducanturque ordinatæ; & in earum extremitate excitentur minimæ lineolæ, efficientes in utroque ſegmento parallelogramma circumſcripta infinite parva; quæ, cum habeant baſes æquales, ſingula ſingulis, erunt inter ſe, uti eorum altitudines, & conſequenter, uti BX ad CQ; Ergo omnium ſumma in uno ſegmento, ad omnium ſummam in altero, erit, ut BX ad CQ; Ergo etiam ſegmenta ellipſeos erunt inter ſe, uti eorum altitudines BX, CQ. Quod erat &c.

Corollarium I.

327. *SI duorum proportionalium ſegmentorum altitudines ſint æquales, erunt hæc ſegmenta, uti eorum baſes*. Nam parallelogramma, ſingula ſingulis, erunt, ut baſes; Ergo ſumma omnium in uno ſegmento, ad ſummam omnium in altero, ideſt, ſegmenta ellipſeos, erunt, ut baſes FE, GH.



Corollarium II.

328. *SI altitudines ſint baſibus reciprocæ, ſegmenta erunt æqualia*. Nam in hoc caſu parallelogramma, ſingula ſingulis, erunt æqualia; Ergo &c.

De

De mensura Ellipseos, ejusque Segmentorum.

SYNOPSIS.

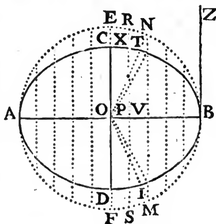
Ellipsim metiri. Circulus æqualis ellipsi. Ellipsis media proportionalis inter duos circulos, super ejusdem axibus descriptos. Metiri segmentum, vel sectorem ellipseos. Per ipsam diametrum datam invenire segmentum æquale dato.

PROPOSITIO LXXI.

329. *Ellipsim metiri.*

Circa majorem axem A B describatur circulus A E B F, qui mensuretur, uti docuimus Tom. I. Elem.; tum fiat: ut axis major A B, ad minorem C D, ita circulus ad ellipsim; Quartus terminus proportionalis dabit quæsitam superficiem ellipsim.

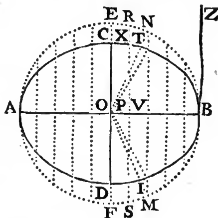
Demonstr. Nam ex natura hujus curvæ, quodlibet elementum circuli est ad suum respondens elementum ellipseos, uti diameter E F, seu major axis, ad minorem C D; Ergo summa elementorum circuli, seu circulus ipse, est ad summam elementorum ellipsis, seu ad ellipsim, uti E F, sive A B, ad C D. Quod erat &c.



Aliter. Inter E F & C D accipiatur media proportionalis, quam voco X; super qua, tanquam diametro, describatur circu-

lus; Dico, hunc circulum fore æqualem ellipsi.

Demonstratio. Nam :: EF . X . CD; Ergo $\overline{EF}^2 : \overline{X}^2 ::$ EF : CD. Atqui circuli sunt inter se, uti quadrata suarum diametrorum; Ergo circulus diametri EF, erit ad circulum diametri X, uti EF ad CD, seu, uti circulus diametri EF, est ad ellipsim; & consequenter circulus diametri X, æquabitur ellipsi. Quod erat &c.



Corollarium.

330. *Ellipsis est media proportionalis inter duos circulos, super ejusdem axibus descriptos.*

Cum enim diametri EF, X, CD sint in proportione continua, eorum quoque circuli erunt similiter proportionales; Ergo circulus diametri X, hoc est, ellipsis, est media proportionalis &c.

DEFINITIO.

Circulus super axe majore, dicitur circumscriptus *ellipsi, & super axe minore dicitur* inscriptus.

Corollarium.

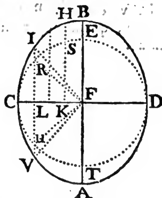
331. Itaque metiri possumus ellipsim ope circuli inscripti, si fiat, uti minor axis ad majorem, ita circulus inscriptus ad ellipsim; vel, si inter minorem axem, & majorem accipiatur media proportionalis, super qua, tanquam diametro, describatur circulus.

PRO-

PROPOSITIO LXXII.

332. MEtiri *segmentum ellipseos*. Si basis TI segmenti, sit ipsa ordinata ad axem majorem, ut in Figura præcedenti; metire prius segmentum correspondens NBM circuli circumscripti; tum fiat: uti major axis ad minorem, ita segmentum NBM ad segmentum TBI.

Si basis IV segmenti, sit ordinata ad minorem axem; metire pariter segmentum correspondens RC*u* circuli inscripti; ac similiter fiat: uti minor axis ad majorem, ita segmentum RC*u* ad segmentum ICV.



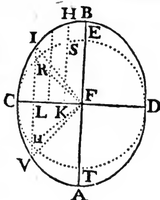
Hi duo casus facile demonstrantur ex dictis.

PROPOSITIO LXXIII.

333. MEtiri *sectorem ellipseos*. Si sector OTBI est super axem majorem, ut in Fig. pag. præced.; metire sectorem correspondentem ONBM circuli circumscripti; tum fiat: ut axis major ad minorem, ita sector ONBM ad sectorem OTBI. Nam hi duo sectores componuntur singuli ex segmento, & triangulo. Jam vero segmentum NBM est ad segmentum TBI, uti major axis ad minorem. Rursum triangulum ONM est ad triangulum OTI, uti basis NM ad basim TI, propter

pter æqualitatem altitudinum, ſive, uti major axis ad minorem. Ergo &c.

Si ſector FICV ellipſis ſit ſuper minorem axem; metire ſectorem correſpondentem FRC*u* circuli inſcripti; ac rurſum per regulam proportionum fiat: ut axis minor ad majorem, ita ſector FRC*u* circuli inſcripti, ad ſectorem FICV ellipſis. Ratio eſt eadem, quam nuper attulimus.





SE-

SECTIONUM
CONICARUM
PARS III.
DE HYPERBOLA.



SECTIONUM CONICARUM

PARS III.

De Hyperbola absolute considerata.

DEFINITIO.

334.  YPERBOLAM *voco, sive lineam curvam in plano descriptam, sive figuram planam, ejusmodi curvà terminatam, in qua quadrata ordinatarum se habent ad invicem, sicut rectangula sub sagittis, & lineà compositâ ex sagitta, & axe.*

De Axibus Conjugatis.

SYNOPSIS.

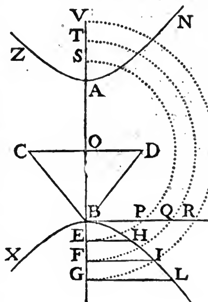
Hyperbolam describere. Definiuntur axis primus, axis secundus, axes conjugati, parameter, centrum, diameter, abscissæ, & foci hyperbolarum oppositarum. Quadratum semisseos secundi axis æquatur rectangulo sub abscissa, & composità ex primo axe, & eàdem abscissà. Præmissa tribus Lemmatis constructione geometrica, determinatur quodvis punctum hyperbolæ. Hinc quadratum cujusvis ordinatæ primo axi, est ad rectangulum correspondens, uti quadratum secundi axis ad quadratum primi. Quadratum semisseos secundi axis est medium proportionale inter quadratum ordinatæ ad focum, & quadratum semisseos primi axis. Determinare ordinatam æqualem semissi secundi axis. Formula generalis analytica, quæ naturam hyperbolæ perfecte exprimat, & quæ perinde conveniat omnibus punctis hyperbolarum oppositarum, & eorum positionem determinet, respectu duorum axium. Atque hinc consequitur, ordinatim applicatas, a vertice incboando, perpetuo crescere; & hyperbolæ axem transversum, nonnisi in unico verticis puncto, eidem occurrere. Tangentem per verticem ducere. Quadratum ordinatæ ad axem primum, majus est rectangulo parametri ejusdem àxis in abscissam. Quadratum ordinatæ ad axem secundum, ita se habet ad summam quadratorum abscissæ a centro, & semisseos secundi axis, uti quadratum primi axis ad quadratum secundi. Atque hinc deducitur formula generalis, quæ conveniat æque omnibus punctis hyperbolarum oppositarum, etiam respectu axis secundi.

PRO-

PROPOSITIO I.

335. Datis duabus rectis, hyperbolam describere. *Constructio.* Datæ sint duæ rectæ AB, CD, sive æquales, sive inæquales inter se, quæ se invicem bifariam, & ad angulos rectos secent.

Producatur utrinque AB indefinite; & a termino B, super ejusdem parte producta, accipiantur portiones æquales BE, EF, FG &c.; tum ab extremitate B excitetur perpendicularis indefinita BR; & facto centro in O, describantur plures circuli, quorum radii sint OE, OF, OG &c.; ac denique tribus rectis AB, CD, BP inveniatur quarta proportionalis EH, quæ perpendiculariter collocetur in E; & similiter tribus rectis AB, CD, BQ, quarta proportionalis FI perpendiculariter insistat in puncto F; atque ita porro de reliquis; tum per extremitates B, H, I, L harum proportionalium, ducatur curva linea; Spatium GBHIL erit semihyperbola; eademque constructione peracta ex alia parte, habebitur hyperbola integra XBL, quæ augeri poterit in infinitum.



Perspicuum est autem, ab altero

ter-

termino A describi posse aliam curvam ZAN, quæ perfecte æqualis erit curvæ XBL.

Demonstratio. Ex natura circuli, quadratum ex BP æquatur rectangulo $EB \times BS$. Quia vero $SA = EB$; hinc $BS = AE$; ac proinde

$$EB \times BS = EB \times AE.$$

Eadem de causa $\overline{BQ}^2 = BF \times AF$;

& $\overline{BR}^2 = BG \times AG$.

Jam vero, per constr., $EH : BP :: CD : AB$;

& $FI : BQ :: CD : AB$;

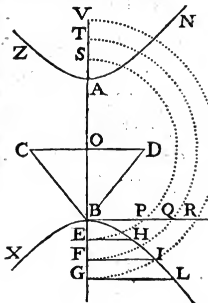
Ergo $EH : BP :: FI : BQ$;

sive $EH : FI :: BP : BQ$;

Ergo $\overline{EH}^2 : \overline{FI}^2 :: \overline{BP}^2 : \overline{BQ}^2$.

Quod si duobus postremis quadratis substituantur rectangula æqualia, fiet

$\overline{EH}^2 : \overline{FI}^2 :: EB \times AE : FB \times AF$; & consequenter curva BHIL erit hyperbola. Nam *quadrata ordinatarum sunt inter se, uti rectangula sub abscissis, & axe producto ad extremitatem earum abscissarum*. Quod erat &c.



De-

DEFINITIONES.

336. *Recta* AB *vocatur* Axis primus, *seu* Axis transversus; *linea* CD, Axis secundus; *& ambo simul dicuntur* Axes conjugati.

Hyperbolæ XBL, ZAN, Hyperbolæ oppositæ *dici solent*.

Parameter primi axis *est tertia proportionalis axi primo, & secundo; &* Parameter secundi axis *est tertia proportionalis axi secundo, & primo*.

Punctum O *dicitur* Centrum *hyperbolæ*.

Omnis recta, quæ a puncto O *ducta, hyperbolam secat, dicitur* Diameter.

Si distantia BD, *vel* BC *transferatur utrinque ab* O *in* E, *& ab* O *in* S, *puncta* E *&* S *erunt* Foci *hyperbolarum oppositarum*.

Denique Abscissæ, *seu* Sagittæ *vocantur in axe producto rectæ* BE, EF *&c., a vertice, & qualibet ordinata interceptæ*.

PROPOSITIO II.

337. *Quadratum ex* CO *semisseos secundi axis, æquatur rectangulo ex abscissa* BE, *interceptà ab alterutro focorum* E, *& vertice* B, *in rectam* AE, *compositam ex primo axe, & eàdem abscissà; hoc est*,

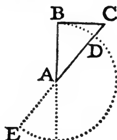
$$\overline{CO}^2 = BE \times AE.$$

Demonstratio. Propter triangulum rectangulum OCB, erit $\overline{CO}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{OB}^2$. Atqui $\overline{CB}^2 = \overline{OE}^2$, per def. foci; Ergo $\overline{CO}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$. Quia vero axis AB dividitur bifariam in O, eique adjecta est abscissa BE, erit ex Elem., $\overline{OE}^2 - \overline{OB}^2 = BE \times AE$; Ergo $\overline{CO}^2 = BE \times AE$. Quod erat &c.

LEMMA I.

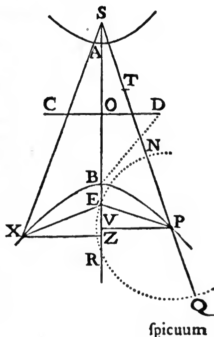
338. *In omni triangulo rectangulo* ABC, *factum ex summa hypotenusæ* AC, *& lateris* AB *per differentiam eorumdem, æquatur quadrato alterius lateris* BC.

Dem. Centro A, intervallo AB, describatur circulus BDE; producaturque hypotenusa in E. Secans CE erit summa hypotenusæ, & lateris AB; ejusque exterior pars CD erit eorum differentia. Atqui ex Elem., $CD \times CE = \overline{BC}^2$; siquidem BC est tangens; Ergo &c.



LEMMA II.

339. *Si ab alterutro focorum* S, *intervallo* SP, *majori, quàm* SB, *describatur arcus, & ab altero foco* E, *intervallo* EP = SP — AB, *describatur alter arcus, qui priorem secet in puncto* P, *a quo ducatur* PV, *perpendicularis axi* AB *producto; Dico*, OB : AV :: AE : SV + SP.



Centro P, intervallo PE, describatur circulus QREN; producaturque SP in Q; tum secetur SN bifariam in T. Perspicuum

ſpicuum eſt, TP fore ſemiſſem ipſius SQ; & OV ſemiſſem ipſius SR. Nam propter normalem PV, eſt $EV = VR$ ex Elem.; & per conſtr., $SN = AB$; & ST, ſive $TN = OB$. His poſitis,

Demonſtratio. Propter ſecantes SQ, SR, habetur ex Elem., $SN : SE :: SR : SQ$;
& ſumptis ſemiſſibus,
ST, ſive $OB : OE :: OV : TP$;
& comp., $OB : OB + OE :: OV : OV + TP$;
& perm., $OB : OV :: OB + OE : OV + TP$;
& comp., $OB : OB + OV :: OB + OE : OB + OE + OV + TP$;
ſive $OB : AV :: AE : OB + OE + OV + TP$.
Atqui $OE + OV = SV$; & $OB + TP = SP$;
Ergo $OB : AV :: AE : SV + SP$.
Quod erat &c.

Corollarium.

HUjus analogiæ terminus ultimus $SV + SP$ æquatur ſummæ & hypotenuſæ SP, & lateris SV trianguli rectanguli SVP.

LEMMA III.

340. I*Iſdem ſtantibus*, *Dico*,
$OB : BV :: BE : SP - SV$.
Demonſtratio. Nam per præced.,
$OB : OE :: OV : TP$;
& div., $OB : OE - OB :: OV : TP - OV$;
& perm., $OB : OV :: OE - OB : TP - OV$;
& div., $OB : OV - OB :: OE - OB : TP - OV - OE + OB$;
ſive $OB : BV :: BE : TP - OV - OE + OB$.
Atqui $TP + OB = SP$; & $- OV - OE = - SV$;
Ergo $OB : BV :: BE : SP - SV$.
Quod erat &c.

Corollarium.

HUjus analogiæ terminus ultimus $SP-SV$ æquatur differentiæ hypotenusæ SP, & lateris SV trianguli rectanguli SVP.

PROPOSITIO III.

341. *Manente eadem constructione Lemmatis II., Dico, punctum* B *fore ad hyperbolam.*

Demonstratio. $SP-SV$ vocetur d; & ultimus terminus prioris analogiæ $SP+SV$ vocetur s. Multiplicentur termini unius analogiæ per terminos alterius; hoc est, $OB : BV :: BE : d$,

& $OB : AV :: AE : s$;

fiet $\overline{OB}^2 : BV \times AV :: BE \times AE : d \times s$.

Sed $BE \times AE = \overline{OD}^2$ (*n.* 337.);

& per Lem. I., $d \times s = \overline{PV}^2$;

Ergo $\overline{OB}^2 : BV \times AV :: \overline{OD}^2 : \overline{PV}^2$;

sive $\overline{PV}^2 : BV \times AV :: \overline{OD}^2 : \overline{OB}^2$.

Accipiantur jam duæ aliæ lineæ SX, XE, quæ sint vel minores, vel majores duabus SP, PE; sed ea lege, ut SX major sit, quàm SB; & $XE = SX - AB$. Inveniemus simili methodo

$$\overline{XZ}^2 : ZB \times AZ :: \overline{OD}^2 : \overline{OB}^2.$$

Ergo $\overline{PV}^2 : BV \times AV :: \overline{XZ}^2 : ZB \times AZ$;

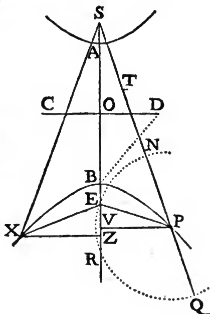
sive $\overline{PV}^2 : \overline{XZ}^2 :: BV \times AV : ZB \times AZ$.

Qua-

Quamobrem rectæ PV, XZ erunt ordinatæ ad axem; nam earum quadrata sunt, uti rectangula sub suis abscissis, & lineà compositâ ex abscissa, & axe; & consequenter puncta P & X erunt ad hyperbolam. Quod erat &c.

Corollarium I.

342. EX præcedenti analogia $\overline{XZ}^2 : ZB \times AZ :: \overline{OD}^2 : \overline{OB}^2$, infertur, *quadratum cujusvis ordinatim applicatæ primo axi, esse ad rectangulum correspondens, uti quadratum semisseos secundi axis, ad quadratum semisseos primi, sive, ut quadratum secundi ad quadratum primi.*



Corollarium II.

343. *QUadratum semisseos secundi axis est medium proportionale inter quadratum ordinatæ ad focum, & quadratum semisseos primi axis.*

Nam per Corollarium præcedens, $\overline{EH}^2$

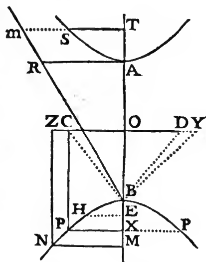
$$\overline{EH}^2 : EB \times AE :: \overline{OD}^2 : \overline{OB}^2.$$

Atqui $EB \times AE = \overline{OD}^2$ (*n.* 337.);

Ergo $:: \overline{EH}^2 : \overline{OD}^2 : \overline{OB}^2.$

PROPOSITIO IV.

344. S*I semissis* OB *primi axis transferatur super semissem secundi axis, producti, ubi opus fuerit, ab* O *in* Y, *&* *distantia* BY *transferatur super axem primum ab* O *in* X, *ducaturque ordinata* PX; *Dico, eamdem ordinatam fore æqualem semissi secundi axis; hoc est,* PX $=$ OD.



Demonstr. Ducatur alia ordinata HE.

Erit $EB \times AE : \overline{HE}^2 :: XB \times AX : \overline{PX}^2.$

Atqui $XB \times AX = \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2$, ex Elem.; & OX $=$ BY per constr.; & in triangulo rectangulo BOY, $\overline{BY}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OY}^2 = 2\,\overline{OB}^2$; nam OB$=$OY per constr.;

Ergo $XB \times AX = 2\,\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OB}^2.$

Quamobrem $EB \times AE : \overline{HE}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{PX}^2.$

Est autem $EB \times AE : \overline{HE}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OD}^2$ (*n.* 342.);

Ergo $\overline{PX}^2 = \overline{OD}^2$; & PX $=$ OD. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

345. *Si quadratum* $\overline{CO}^2$ *semisseos secundi axis, ducatur in quadratum* $\overline{OX}^2$ *abscissæ cujuslibet, sumptæ a centro* O, *& productum dividatur per quadratum* $\overline{OB}^2$ *semisseos primi axis, & a quoto subducatur quadratum* $\overline{CO}^2$ *semisseos secundi axis; Dico, huic differentiæ æquari quadratum* $\overline{PX}^2$ *ordinatæ ad primum axem.*

Demonstratio. $\overline{OB}^2 : \overline{CO}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 : \overline{PX}^2$; Ergo, si factum mediorum dividatur per primum terminum, fiet $\frac{\overline{CO}^2 \times \overline{OX}^2 - \overline{CO}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \overline{PX}^2$.

Atqui $$\frac{-\overline{CO}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = -\overline{CO}^2;$$

Ergo $$\overline{PX}^2 = \frac{\overline{CO}^2 \times \overline{OX}^2}{\overline{OB}^2} - \overline{CO}^2.$$

Quod erat &c.

Monitum.

346. *Notabis, rectangulis omnibus sub abscissa, & lineà compositâ ex abscissa, & axe, hoc est,* $AX \times BX$, *substitui semper posse differentiam quadratorum* $\overline{OX}^2 - \overline{OB}^2$, *& vicissim; uti perspicuum est ex Elem. Quod deinceps semper erit observandum.*

Corollarium I.

347. AB hoc Theoremate, seu æquatione facile consequuntur proprietates reliquæ. Ut autem calculo litterali multo expeditius demonstrentur, fiat axis primus $AB = 2t$; & secundus $CD = 2c$; quælibet ordinata $PX = y$; & portio quævis OX, intercepta a centro O, & occursu ordinatarum, fiat $= x$. Itaque æquatio superior sic per analysim exhibetur: $yy = \frac{ccxx}{tt} - cc$.

Cum autem hæc proprietas conveniat æque omnibus punctis hyperbolarum oppositarum, eademque determinet eorum positionem, respectu duorum axium; hinc *æquatio proposita perfecte exprimit hujus curvæ naturam*.

Corollarium II.

348. *SI a quovis puncto* X *primi axis producti intra hyperbolam, ducatur recta* PXP, *parallela suo axi conjugato* CD; *hæc occurret hyperbolæ in duobus punctis, utrinque æque distitis ab eodem puncto* X. Nam quadrata XP, utrinque ab axe, sunt singula æqualia eidem quantitati, $yy = \frac{ccxx}{tt} - cc$.

Co-

Corollarium III.

349. AB eadem æquatione $yy = \frac{ccxx}{tt} - cc$ consequitur proprietas altera; nimirum, quò magis OX, vel OT (x), utrinque a centro sumpta, augetur; eò magis ordinata quælibet PX, vel TS (y), utrinque ab axe primo, augetur, & quidem in infinitum. Contra vero, decrescente OX (x), decrescit quoque PX (y); ita ut, si OX (x) fiat æqualis ipsi OB (t), ordinata PX evanescet; nam æquatio superior in hanc transformabitur, $yy = \frac{cctt}{tt} - cc = o$.

Hinc I. constat, *hyperbolam ex earum curvarum numero esse, quæ figuram non claudunt*. Cum ordinatim applicatæ, a vertice inchoando, perpetuo crescant; & proinde crescat curvæ divaricatio, quæ idcirco nunquam erit deinceps coitura.

II. *Hyperbolæ axem transversum, seu primum nonnisi in unico verticis puncto eidem hyperbolæ occurrere*. Nam crescentibus continuo ordinatim applicatis, curva ab axe magis magisque in infinitum divergit. Vertices autem oppositi, quamquam in eodem axe, non tamen sunt in eadem hyperbola, sed in oppositis.

III. *Si per utramque primi axis extremitatem ducantur parallelæ axi secundo; illæ erunt in iisdem punctis tangentes*.

PROPOSITIO VI.

350. *QUadratum ordinatæ* ST *ad axem primum, majus est rectangulo parametri* RA *ejusdem axis, in abscissam* AT.

Duobus axibus AB, CD quæratur tertia proportionalis AR, nimirum, parameter; quæ a vertice

ce A ducatur parallela axi conjugato CD; jungaturque BR, cui ordinata TS producta occurrat in *m*.

Dem. $\overline{ST}^2 : TA \times TB :: \overline{CD}^2 : \overline{AB}^2$;

& per def. parametri, $:: AB : CD : AR$;

Ergo $\overline{CD}^2 : \overline{AB}^2 :: AR : AB$;

& proinde $\overline{ST}^2 : TA \times TB :: AR : AB$.

Jam vero, cum triangula RBA, *m*BT sint similia, erit $AR : AB :: mT : TB$;

& multiplicando duos ultimos terminos per TA, fiet $AR : AB :: mT \times TA : TB \times TA$.

Ergo $\overline{ST}^2 : TA \times TB :: mT \times TA : TB \times TA$;

& consequenter $\overline{ST}^2 = mT \times TA$.

Est autem $mT \times TA$ majus $TA \times AR$; Constat itaque propositum.

PROPOSITIO VII.

351. *Quadratum* $\overline{NZ}^2$ *ordinatæ ad axem secundum, ita se habet ad quadratum* $\overline{ZO}^2$ + *quadratum* $\overline{CO}^2$ *semisseos secundi axis, uti quadratum primi axis ad quadratum secundi; hoc est,* $\overline{NZ}^2 : \overline{ZO}^2 + \overline{OC}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OC}^2$.

Demonstratio. Quoniam $\overline{NM}^2 : \overline{OM}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OB}^2$; Ergo multipli-

tiplicatis extremis, & mediis, erit $\overline{NM}^2 \times \overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 \times \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2$; & utrinque addendo $+ \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2$, fiet $\overline{NM}^2 \times \overline{OB}^2 + \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2 = \overline{OM}^2 \times \overline{OC}^2$. Atqui $NM = ZO$; & $OM = NZ$; Ergo $\overline{ZO}^2 \times \overline{OB}^2 + \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2 = \overline{NZ}^2 \times \overline{OC}^2$. Jam vero radices primi producti sunt $\overline{ZO}^2 + \overline{OC}^2$ & $\overline{OB}^2$; nam inter se multiplicatæ, exhibent primum productum. Et radices secundi producti sunt $\overline{NZ}^2$ & $\overline{OC}^2$. Quamobrem, si duæ istæ quantitates ordinentur in extremis alicujus proportionis, & reliquæ duæ pro mediis, habebitur $\overline{NZ}^2 : \overline{ZO}^2 + \overline{OC}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OC}^2$. Quod erat &c.

Corollarium I.

352. Atque hinc consequitur,

$$NZ = \frac{\overline{ZO}^2 \times \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{ZO}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2} + \overline{OB}^2.$$

Habes jam differentiam quadrati ordinatæ ad primum axem, a quadrato ordinatæ ad secundum; ac proinde, etiam respectu axis secundi, generalem æquationem, quæ conveniat æque omnibus punctis hyperbolarum oppositarum, eorumque positionem determinet, respectu duorum axium.

Sit enim axis secundus $CD = 2t$, & $CO = t$; axis conjugatus $AB = 2c$, & $OB = c$; $NZ = y$, & quælibet abscissa, sumpta a centro, & occursu ordinatæ, nimirum, $ZO = x$. Erit itaque

$$yy = \frac{xx \times cc}{tt} + cc.$$

Co-

Corollarium II.

353. QUamobrem, etiam respectu axis secundi, quò magis OZ (x) augetur, eò magis augetur quoque ordinata NZ (y), utrinque ab axe sumpta, & quidem in infinitum. Contra vero, quò magis decrescit OZ (x), eò magis ordinata NZ (y) diminuitur; ita tamen, ut evanescente OZ (x), æquatio proposita transformetur in hanc, $yy = cc$, & $y = c$; hoc est, ordinata NZ, quæ in hoc casu evadet æqualis ipsi OB, erit minima omnium ordinatarum, utrinque a centro sumptarum.

Corollarium III.

354. EX eadem æquatione, ut antea, demonstrabitur, quòd, si a quovis puncto C axis secundi, ducatur parallela primo axi, hæc occurret hyperbolis oppositis in duobus punctis, æque dissitis utrinque ab eodem puncto C. Demonstrabitur præterea, hyperbolas oppositas magis ac magis in infinitum recedere ab axe secundo. Hoc tamen discriminis intereſt, quòd axis primus cuilibet hyperbolarum oppositarum occurrit in unico puncto, & intra easdem producitur; secus vero axis secundus totus cadit extra hyperbolas oppositas, eisque nunquam occurrit, quamvis indefinite productus.

De

De Diametris.

SYNOPSIS.

OMnis recta, per centrum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, bifariam in eodem centro dividitur. In axe producto tres rectas a centro in proportione continua definire. In hyperbola triangula construere, trapeziis æqualia. Hinc, posita eadem constructione, quadrata ordinatarum cuivis diametro, sunt inter se, uti rectangula sub sagittis, & lineà compositâ ex sagitta, & axe. Omnis recta, ducta per centrum, & utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, est diameter. Itaque omnes illæ proprietates, quæ hyperbolæ competunt, respectu axis, ex eodem Theoremate traducuntur ad aliam quamvis diametrum. Cujuslibet datæ hyperbolæ sive centrum, sive diametrum aliquam reperire. In omni hyperbola existit diameter, quæ rectos cum suis ordinatis angulos constituit, ac proinde axis vocatur. Omnes aliæ diametri cum suis ordinatis, saltem ad unam partem, non alios angulos continent, quam quos continent rectæ, quæ ex verticibus axis ad ipsa hyperbolæ puncta ducuntur.

355. QUemadmodum in parabola, & in ellipsi, ita etiam in hyperbola omnes aliæ diametri transeunt per illud punctum, quod bifariam dividit axem primum, & dicitur *Centrum*, ea de causa, quia omnis recta per ipsum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, bifariam in eo dividitur; uti mox demonstrabitur.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

356. *Omnis recta, per centrum ducta, quæ uni hyperbolarum oppositarum occurrit, debet etiam cum altera convenire; Et utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, bifariam in eodem centro dividitur.*

Ducatur enim ex centro C ad unam ex hyperbolis oppositis recta CE; tum demissà ad axem AB ordinatà EG, capiatur CH=CG; erigatur deinde ad partem contrariam ordinata alia HF; ac denique jungatur recta CF; Dico, rectam EC productam convenire cum hyperbola opposita in F, totamque EF bifariam secari in ipso centro.

Demonstratio. Quoniam æquales sunt inter se tam duæ CA, CB, quam duæ CG, CH; erunt pariter æquales duæ AG, BH; unde æqualia quoque erunt inter se tam rectangula AG×GB, AH×HB, quam quadrata ordinatarum EG, FH, quæ rectangulis illis sunt proportionalia; hinc, cum duo triangula CGE, CHF habeant duo latera CG, EG æqualia duobus lateribus CH, FH, alterum alteri,

F
C A G L N
H B
E O
M

& æqua-

& æquales angulos sub iis lateribus contentos, omnia alia pariter æqualia habebunt. Duæ igitur CE, CF æquales erunt inter se. Sed eædem, ob æquales angulos ECG, FCH, jacent quoque in directum; Ergo recta CE, producta versus centrum, conveniet cum hyperbola opposita in F; totaque EF bifariam secabitur in ipso centro. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

357. *SI recta* EF, *per centrum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, bisecet in* O *subtensam* AM, *pertinentem ad verticem* A, *demissaque ad axem* AB *ordinatà* EG, *huic per punctum* O *parallela ducatur* OL; *Dico, esse in proportione continua* ::CL:CG:CA.

Demonstratio. Sicuti AM dupla est ipsius AO; ita, si ducatur ad axem ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipsius AL; Quare, cum sit etiam axis AB duplus ipsius AC, erit tota NB dupla pariter totius LC; & propterea rectangulum $AN \times NB$ erit quadruplum rectanguli $AL \times LC$.

Rursus, quoniam MN dupla est etiam ipsius OL; erit MN quadratum, quadruplum quadrati, quod fit ex OL; Ergo $\overline{MN}^2 : \overline{OL}^2 :: AN \times NB : AL \times LC$;

sive $\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{OL}^2 : AL \times LC$.

Sed propter hyperbolam,

$$\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{EG}^2 : AG \times GB;$$

Ergo $\overline{OL}^2 : AL \times LC :: \overline{EG}^2 : AG \times GB$;

sive $\overline{OL}^2 : \overline{EG}^2 :: AL \times LC : AG \times GB$.

Hinc, cum, ob triangula æquiangula, sit quadratum

dratum OL ad quadratum EG, uti quadratum CL ad quadratum CG; erit rursus

$\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: AL \times LC : AG \times GB;$

& propterea, subtrahendo terminos secundæ rationis a terminis primæ, nimirum,

$\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: \overline{CL}^2 - AL \times LC : \overline{CG}^2 - AG \times GB,$

fiet ex Elem.,

$\overline{CL}^2 : \overline{CG}^2 :: AC \times CL : \overline{AC}^2 :: CL : AC;$

Ergo tres rectæ CL, CG, CA sunt continue proportionales. Quod erat &c.

Scholion.

Hoc Theorema fundamentum est reliquorum pro determinandis hyperbolæ diametris.

PROPOSITIO X.

358. *Si a vertice* A, *&* *puncto* E *ducantur rectæ* AK, EI, *parallelæ ipsi ordinatæ* EG, *&*

F H B C I S A Q G L Q N X P Z K R E V O R P M

subten-

subtensæ AM, *quarum prior* AK *conveniat cum* EF *in puncto* K, *& altera* EI *cum* AB *in puncto* I; *Dico, triangulum* EGI *æquale esse trapezio* AGEK.

Demonstratio. Per præced., CL:CG::CG:CA.

Sed CL:CG::CO:CE::CA:CI;

Quare CG:CA::CA:CI;

Itaque CG:CI $::\overline{CG}^2:\overline{CA}^2$.

Jam propter communem altitudinem triangulorum CEG, CEI, erit CG:CI::triangulum CEG: triangulum CEI; & pariter, ob similia triangula CEG, CKA, quadratum CG est ad quadratum CA, ut triangulum CEG ad triangulum CKA; Ergo, ut triangulum CEG ad triangulum CEI; ita idem triangulum CEG ad triangulum CKA.

Hinc æquantur inter se duo triangula CEI, CKA; & dempto communi trapezio CKXI, supererit triangulum XAI, æquale triangulo XEK. Addatur utrique commune trapezium AGEX: fiet trapezium AGEK æquale triangulo EGI. Quod &c.

PROPOSITIO XI.

359. **P***Osita eadem constructione, Dico, triangulum* AOK *æquale esse trapezio* EOAI.

Demonstr. Est enim CL:CG::CG:CA (*n.* 357.).

Sed CL:CG::CO:CE;

itemque CG:CA::CE:CK;

Ergo CO:CE::CE:CK;

& propterea, cum tres rectæ CO, CE, CK sint continue proportionales, erit quoque

CO:CK $::\overline{CO}^2:\overline{CE}^2$.

Cùm vero triangula CAO, CAK habeant communem altitudinem, erit CO:CK:: triang. CAO: triang. CAK. Rursus, ob similia triangula CAO,

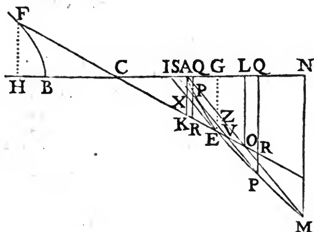
CIE, erit quadratum CO ad quadratum CE, uti triangulum CAO ad triang. CIE. Quamobrem erit rursus, ut triangulum CAO ad triangulum CAK; ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE.

Itaque duo triangula CAK, CIE æqualia erunt inter se; a quibus dempto CKXI, supererit triangulum XAI = XKE. Addatur utrique commune trapezium AOEX: fiet trapezium EOAI = triangulo AOK. Quod erat &c.

PROPOSITIO XII.

360. *SI in perimetro hyperbolæ capiatur punctum quodvis aliud* P, *ex quo ducantur ad diametrum* AB *duæ aliæ rectæ* PS, PQ, *parallelæ ipsis* EI, EG; *Dico, triangulum* PQS *æquale esse correspondenti trapezio* AQRK.

Demonstratio. Quoniam triangula CAK, CGE sunt similia, erit, ut CA quadratum ad CG quadratum; ita triangulum CAK ad triangulum CGE;



quare,

quare, subtrahendo antecedentes ex consequentibus, erit etiam, ut CA quadratum ad rectangulum AG $\times$ GB; ita triangulum CAK ad trapezium AGEK.

Eadem ratione, cum similia sint triangula CAK, CQR, erit, ut CA quadratum ad CQ quadratum; ita triangulum CAK ad triangulum CQR; & subtrahendo antecedentes ex consequentibus, erit quoque, ut CA quadratum ad rectangulum AQ $\times$ QB; ita triangulum CAK ad trapezium AQRK.

Quamobrem per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut AG $\times$ GB ad AQ $\times$ QB; ita trapezium AGEK ad trapezium AQRK. Est autem ex natura hyperbolæ, respectu axis, $AG \times GB : AQ \times QB :: \overline{EG}^2 : \overline{PQ}^2$; Ergo ex æquo, ut EG quadratum ad PQ quadratum; ita trapezium AGEK ad trapezium AQRK.

Et quoniam ex constructione, parallelæ sunt inter se tam duæ EG, PQ, quàm duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS similia erunt; hinc, ut EG quadratum ad PQ quadratum; ita triangulum EGI ad triangulum PQS; Ergo rursus ex æquo, ut triangulum EGI ad triangulum PQS; ita trapezium AGEK ad trapezium AQRK. Sed triangulum EGI æquale est trapezio AGEK; uti demonstratum est n. 358.; Ergo triangulum PQS erit quoque æquale trapezio AQRK. Quod erat &c.

Monitum.

Si punctum P *sumatur in hyperbola opposita, quæ transit per verticem alterum* B; *tunc loco trapezii* AQRK *capienda erit differentia triangulorum* CAK, CQR, *quæ in omni casu semper æquabitur eidem trapezio. Et demonstratio adhuc est eadem.*

PROPOSITIO XIII.

361. *Iisdem stantibus, si recta* PS, *parallela ipsi* EI, *occurrat rectæ* EF *in puncto* V; *Dico, triangulum* PVR *æquale esse correspondenti trapezio* EVSI.

Casus I.

Si punctum S sit supra verticem A, & punctum P existat inter A & E;

Demonstratio. Triangulum EGI æquatur trapezio AGEK (*n.* 358.); & triangulum PQS æquatur trapezio AQRK (*n.* 360.). Si ex primo triangulo auferatur secundum, & ex trapezio trapezium, ex utroque autem subducatur commune trapezium PQGZ; supererit trapezium EZSI, æquale trapezio PZER; ac proinde, addito communi triangulo EZV, fiet trapezio EVSI = triangulum PVR. Quod erat &c.

F C ISAQ G LQ N
H B
X P
Z
KR E V O R
P
M

Ca-

Caſus II.

SI punctum S ſit quidem ſupra verticem A, ſed punctum P ſit ad alteram partem puncti E, relate ad eumdem verticem A;

Demonſtratio. Quoniam triangulum EGI æquale eſt trapezio AGEK; addito utrinque communi trapezio EGQR, fiet trapezium EIQR æquale trapezio AQRK, ſive etiam triangulo PQS; & proinde, dempto communi trapezio VSQR, fiet trapezio EVSI æquale triangulum PVR. Quod &c.

Caſus III.

DEnique, ſi punctum S ſit infra verticem A, ut in Figura ſequenti;

Demonſtratio. Quoniam triangulum PQS oſtenſum eſt æquale trapezio AQRK; addito, vel dempto communi trapezio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapezio ASVK. Cum autem triangula XEK, XAI ſint æqualia ex demonſtratis n. 358.;

erit trapezium ASVK æquale trapezio EVSI; Quare etiam triangulum PVR æquabitur trapezio EVSI. Quod erat &c.

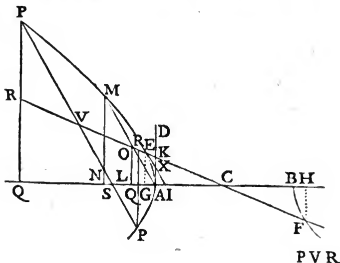
Monitum.

SI punctum P capiatur in hyperbola opposita; in hoc casu, loco trapezii EVSI, sumenda erit differentia triangulorum CEI, CVS, quæ in omni casu trapezium illud adæquat. Demonstratio est eadem.

PROPOSITIO XIV.

362. *SI recta quævis EF, ducta per centrum C, & ad hyperbolas oppositas terminata, & ulterius producta, bisecet in O subtensam AM, ductam a vertice A axis; Dico, eamdem EF secare quoque bifariam in V quamvis aliam rectam PP, quæ ipsi AM parallela, utrinque ad unam hyperbolarum terminetur.*

Demonstratio. Positis enim omnibus, ut supra, erit per præced., utrumque triangulorum PVR,



PVR æquale eidem trapezio EVSI; Ergo æqualia erunt inter se eadem duo triangula PVR, PVR; quæ, cum similia etiam sint, ita se habent, ut quadrata laterum homologorum PV, PV; Quamobrem latera isthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & proinde tota PP bifariam secta erit in V. Quod erat &c.

PROPOSITIO XV.

363. *Manentibus omnibus, ut supra, Dico, quadrata ordinatarum* AO, PV *esse inter se, uti rectangula correspondentia* EO×OF, EV×VF.

Demonstratio. Cum enim triangula CEI, COA sint similia, erit, ut CE quadratum ad CO quadratum; ita triangulum CEI ad triangulum COA; hinc, subtrahendo antecedentes ex consequentibus, erit etiam, ut CE quadratum ad rectangulum EO×OF; ita triangulum CEI ad trapezium EOAI.

Similiter, cum triangula CEI, CVS sint similia, erit, ut CE quadratum ad CV quadratum; ita triangulum CEI ad triangulum CVS; & rursus subtrahendo antecedentes ex consequentibus, erit quoque, ut CE quadratum ad rectangulum EVF; ita triangulum CEI ad trapezium EVSI.

Ergo ex æquo erit pariter, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF; ita trapezium EOAI ad trapezium EVSI; ac proinde, cum hæc trapezia sint æqualia triangulis AOK, PVR (*n.* 359. & 360.); erit ex æquo, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita rectangulum EO×OF; ad rectangulum EV×VF.

Quoniam vero ex constructione, parallelæ sunt inter se tam duæ AK, PR, quàm duæ AO, PV; triangula duo AOK, PVR similia erunt; Quare,

cum ſit A O quadratum ad P V quadratum, ut triangulum A O K ad triangulum P V R; erit rurſus ex æquo, $\overline{AO}^2 : \overline{PV}^2 :: EO \times OF : EV \times VF$. Quod &c.

Scholion.

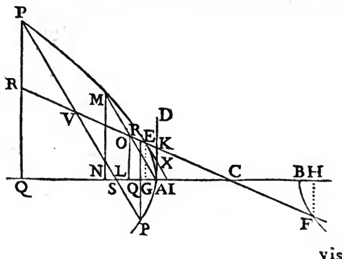
Q*Uia vero dubitari poſſet, an quævis recta* P P, *parallela ſubtenſæ* A M, *utrinque ad hyperbolam terminetur; quod in præcedenti Theoremate aſſumptum eſt, demonſtrandum aggredior.*

PROPOSITIO XVI.

364. O*Mnis recta, quæ intra unam hyperbolarum ducitur, parallela ſubtenſæ* A M, *ducta a vertice axis, utrinque ad eamdem hyperbolam terminatur.*

Res patet de rectis, quæ ducuntur intra ſegmentum hyperbolicum A E M.

Ducatur itaque extra illud ſegmentum recta quæ-



vis

vis PV, ipsi AM parallela; &, si fieri potest, occurrat hyperbolæ tantum ex una parte in P. Extendatur eadem ad partem alteram versus V; & fiat VP=PV; Dico, hoc aliud punctum P esse in hyperbola.

Demonstratio. Ponantur omnia, ut supra. Quoniam duæ rectæ PV, VP inter se sunt æquales, erit triangulum PVR ex una parte, æquale triangulo PVR ex altera. Sed illud, propter hyperbolam (*n.* 361.), est æquale trapezio EVSI, sive etiam ASVK; Ergo eidem trapezio ASVK hoc etiam æquale erit; & propterea utrumque triangulorum PQS erit æquale correspondenti trapezio AQRK; hinc, ut triangulum PQS ad triangulum PQS; ita trapezium AQRK ad trapezium AQRK.

Jam vero, propter triangula similia PQS, PQS, erunt hæc inter se, uti quadratum PQ ad quadratum PQ. Itemque, ob diametrum AB, bisectam in centro C, trapezium AQRK est ad trapezium AQRK, ut rectangulum AQB ad rectangulum AQB. Ergo ex æquo, $\overline{PQ}^2 : \overline{PQ}^2 :: AQ \times QB : AQ \times QB$; & propterea, sicuti punctum unum P est in hyperbola; sic etiam ad hyperbolam pertinebit punctum aliud P. Quod erat &c.

Monitum.

Quamvis recta PV *ducta fuerit intra eamdem illam hyperbolam, in qua reperitur subtensa* AM; *tamen facile eadem demonstratio ad eas etiam rectas transferri poterit, quæ intra hyperbolam oppositam parallelæ ducuntur eidem* AM; *dummodo in hoc casu, loco trapezii* AQRK, *capiatur differentia triangulorum* CAK, CQR; *&* *loco trapezii* EVSI, *differentia triangulorum* CEI, CVS.

Co-

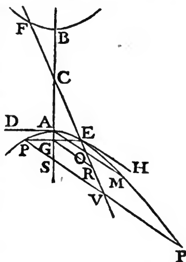
Corollarium I.

365. HInc *omnis recta* EF, *ducta per centrum* C, *& utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, est diameter ipsarum*. Nam & bifariam dividit rectas omnes, parallelas subtensæ AM, & utrinque ad unam ex ipsis hyperbolis terminatas; & quadrata ex semissibus illarum rectarum habent inter se eamdem proportionem, quam habent rectangula, sub correspondentibus portionibus ipsius EF contenta.

Corollarium II.

366. HInc *omnes illæ proprietates, quæ hyperbolæ competunt, respectu axis, ex eodem Theoremate traducuntur ad aliam quamvis diametrum ejusdem hyperbolæ*. Esto enim AB axis hyperbolæ, centrum C, & alia quævis diameter EF.

I. Sicuti axis AB suas habet ordinatas; ita & diameter alia EF. Sunt autem hujus ordinatæ, omnes rectæ parallelæ subtensæ AM, quæ a diametro EF bifariam dividitur in puncto O.



II. Sicuti AD, ducta per verticem A axis AB, parallela suis ordinatis, tangit hyperbolam in solo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, similiter ordinatis suis parallela, tanget hyperbolam in solo puncto E.

Co-

Corollarium III.

367. EX hac communi axis, & diametrorum omnium proprietate Theorema illud fundamentale, quod n. 357. demonstravimus, respectu axis, simili ratione demonstrari poterit de quavis alia diametro EF.

Itaque, si per centrum hyperbolæ C ducatur recta aliqua AB, quæ bisecet in G subtensam PE, pertinentem ad verticem E, & demittatur ad diametrum FE ordinata PV, cui per punctum G agatur parallela GR; Dico, fore CV:CR::CR:CE.

PROPOSITIO XVII.

368. *QUælibet diameter non alias rectas, utrinque ad unam hyperbolarum terminatas, dividit bifariam, quàm quæ ordinatim ad ipsam diametrum applicantur.*

Esto enim diameter quævis AB; sitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ sunt parallelæ. Ducatur intra unam hyperbolarum recta PP, quæ utrinque terminata ad eamdem hyperbolam, non sit ordinatim applicata diametro AB; Dico, eam ab ipsa diametro AB non posse secari bifariam.

Demonstratio. Si enim fieri potest, secetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam illa non est parallela ordinatis ipsius AB, duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipsi PP parallela, secet in puncto alio hyperbolam, transeuntem per eumdem verticem A. Ducatur itaque recta ista; & sit AM, quæ secetur bifariam in O; jungaturque CO, quæ producatur, donec occurrat hyperbolis oppositis, in punctis E & F.

Quamobrem, quia recta EF transit per centrum C, &

C, & bifecat in O fubtenfam AM, pertinentem ad verticem A; fecabit quoque bifariam in V rectam PP, ipfi AM parallelam (*n.* 362.). Sed, ex hypothefi, recta PP fecatur bifariam in S; Ergo eadem PP bifecta erit tam in puncto S, quàm in puncto V; quod eft abfurdum. Ergo &c.

Corollarium I.

369. SI aliqua diameter bifariam fecet rectam aliquam, utrinque terminatam ad unam hyperbolarum; hæc erit diametri illius ordinata.

Corollarium II.

370. SI recta aliqua bifecet alias duas parallelas, quarum quælibet utrinque ad unam hyperbolarum fit terminata; hæc erit diameter hyperbolæ; atque adeo tranfibit per ejus centrum.

Corollarium III.

371. *CUjuslibet datæ hyperbolæ five centrum, five diametrum aliquam reperire*. Intra datam hyperbolam, vel etiam intra ejus oppofitam ducantur duæ parallelæ, & utrinque ad eamdem terminatæ; recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit; quæ, fi bifariam fecetur, ejufdem hyperbolæ centrum exhibebit.

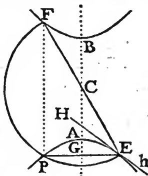
PROPOSITIO XVIII.

372. *IN omni hyperbola existit diameter, quæ rectos cum suis ordinatis angulos constituit; ac proinde axis vocatur.*

Datæ hyperbolæ inveniatur diameter quævis EF (*n.* 371.); sitque EH recta illa, cui omnes ejusdem diametri ordinatæ debent esse parallelæ (*n.* 364.). Jam, si angulus FEH fuerit rectus, erit ipsa EF diameter quæsita. Quòd si aliter contigerit, invenietur sequenti ratione.

Super diametro EF, versus eam partem, in qua recta EH constituit cum eadem EF angulum acutum, describatur semicirculus EPF, qui necessario secabit hyperbolam, transeuntem per verticem E, in puncto aliquo P; jungatur deinde recta PE, quæ secetur bifariam in puncto G, per quod agatur diameter AB; Dico, hanc cum suis ordinatis rectos angulos constituere.

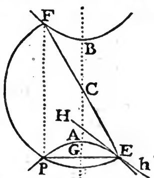
Demonstratio. Quia rectæ PE, EF bisectæ sunt in punctis G & C, erit GE : GP :: CE : CF; itaque juncta recta PF erit parallela ipsi diametro AB; adeoque angulus CGE = angulo FPE. Sed angulus FPE in semicirculo est rectus; Ergo etiam angulus CGE rectus erit; & consequenter diameter AB cum suis ordinatis rectos angulos constituet. Quod erat &c.



Scho-

Scholion.

373. Quod autem *semicirculus, descriptus super diametro* EF, *versus eam partem, in qua recta* EH *constituit cum ipsa* EF *angulum acutum, secare debeat hyperbolam, transeuntem per verticem* E, *in puncto aliquo* P, *facile demonstratur in hunc modum. Cum enim angulus* FEH *non sit major omni angulo acuto rectilineo, poterit quidem ex puncto* E *duci recta alia, quæ constituat cum eadem* EF *angulum acutum, majorem angulo* FEH. *Sed recta ista secare debet tum hyperbolam, transeuntem per verticem* E, *tum ipsum semicirculum; Ergo etiam semicirculus, & hyperbola inter se mutuo convenient.*



Corollarium.

374. Itaque *circulus super axe* AB, *tanquam diametro, descriptus*, ut in Figura sequenti, *medius cadit inter utramque hyperbolam; nec ulli ipsarum occurrere potest.*

Cum enim axis AB rectos angulos constituat cum suis ordinatis, perpendiculares, quæ super ipso eriguntur ex punctis A & B, parallelæ ejus ordinatis, contingent hyperbolas dumtaxat in iisdem punctis. Sed eædem perpendiculares cadent etiam extra circulum; Quare mediæ erunt inter circulum, & hyperbolas, circulo adjacentes; & consequenter ipse circulus cum neutra hyperbolarum conveniet.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

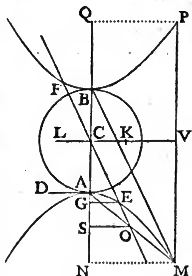
375. *Omnes aliæ diametri cum suis ordinatis, saltem ad unam partem, non alios angulos continent, quàm quos continent rectæ, quæ ex verticibus axis ad ipsa hyperbolæ puncta ducuntur.*

Esto A B axis ipsius hyperbolæ; & ducta ex vertice ejus A subtensa quavis A M, sit E F diameter, quæ bisecet in O eamdem subtensam, tanquam suam ordinatam; jungaturque B M; Dico, angulum A M B = A O C.

Demonstratio. Quia A C : C B :: A O : O M, erit B M parallela ipsi E F; & consequenter angulus A M B = A O C angulo, quem diameter cum ordinata ad plagam unam constituit. Quod erat &c.

Corollarium.

Nullum vero horum angulorum rectum esse posse, sed quemlibet acutum existere, jam inde consequitur, quod circulus, qui describitur super A B, tanquam diametro, ex dictis medius cadat inter ipsas hyperbolas, nec ulli earum occurrat. Eosdem autem angulos minores semper, ac minores fieri, prout ipsarum vertices magis magisque ab ipso axe recedunt, ac tandem prorsus evanescere, cum infinite distant ab eodem axe, facile constat ex iisdem principiis.



De Conjugatis Diametris.

QUemadmodum in ellipsi, ita & in hyperbola diameter quævis suam habet conjugatam. At hyperbola id habet peculiare, ut conjugatæ istæ diametri, etsi transeant per ejus centrum, & parallelæ sint ordinatis diametrorum, ad quas, velut conjugatæ, referuntur; tamen ad hyperbolas oppositas minime terminentur; sed extremitatibus suis binas alias hyperbolas constituant, quæ prioribus conjugatæ dicuntur; uti infra demonstrabitur.

SYNOPSIS.

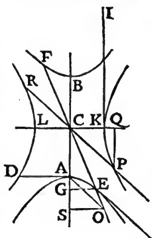
REcta, quæ per centrum hyperbolarum oppositarum ducitur, parallela ordinatis alicujus diametri, nusquam iisdem hyperbolis potest occurrere; secatque bifariam rectas omnes diametro parallelas, & ad utramque hyperbolam terminatas; ac vices diametri conjugatæ subibit, si limites, seu vertices eidem certa lege præscribantur. Quid intersit inter ordinatas diametro conjugatæ, quæ ad hyperbolas oppositas terminantur, ab ordinatis, quæ ad unam ex hyperbolis dumtaxat terminantur. Ordinatæ, quæ ad duas quascunque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividunt ipsas diametros in eadem ratione. Hinc ipsæ ordinatæ, quæ super diametris hyperbolarum oppositarum demittuntur ex alternis earum verticibus, sunt inter se, ut conjugatæ earumdem diametrorum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

376. RECta, *quæ per centrum hyperbolarum oppositarum ducitur, parallela ordinatis alicujus diametri, nusquam iisdem hyperbolis potest occurrere.*

Esto enim hyperbolarum oppositarum diameter aliqua AB; earumque centrum sit C; per quod ducatur recta KL, parallela ordinatis ipsius diametri AB; Dico, rectam istam KL cum nulla earumdem hyperbolarum posse convenire.



Demonstratio. Si per diametri vertices A & B ducantur duæ aliæ rectæ, iisdem ordinatis parallelæ; hæ tangent hyperbolas in iis dumtaxat punctis; & totæ cadent extra. Sed recta KL, binis illis rectis, quibus interjicitur, parallela, iisdem nusquam potest occurrere; Ergo recta KL cum neutra earum hyperbolarum poterit convenire. Quod erat &c.

Corollarium.

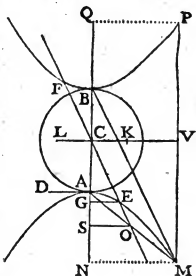
IDem dicendum de quavis alia recta, quæ, parallela iisdem ordinatis, transeat per quodvis aliud punctum intermedium ipsius AB.

PROPOSITIO XXI.

377. *Recta, quæ ducitur per centrum hyperbolarum oppositarum, parallela ordinatis alicujus diametri, bifariam secat rectas omnes, diametro parallelas, & ad utramque hyperbolam terminatas.*

Iisdem manentibus, ut in superiori constructione, ducatur recta MP, parallela ipsi AB; eaque occurrat hyperbolis oppositis, in punctis M & P; Dico, rectam istam MP secari bifariam in V ab ipsa KL.

Demonstratio. Demittantur ex punctis M & P ordinatæ MN, PQ ad diametrum. Et quoniam istæ sunt inter se parallelæ, æquales quoque erunt inter se. Æqualia pariter erunt rectangula AN × NB, AQ × QB, quæ ordinatarum quadratis proportionalia sunt. Hæc rectangula addantur æqualibus quadratis CA, CB: erunt, ex Elem., æqualia quoque tota quadrata CN, CQ; & proinde etiam horum latera CN, CQ. Sed propter parallelogramma CM, CP, CN=MV; & CQ =PV; Ergo MV=PV; & propterea tota PM bisecta erit in V. Quod &c.



PRO-

PROPOSITIO XXII.

378. R*ecta, quæ ducitur per centrum hyperbolarum oppositarum, parallela ordinatis alicujus diametri, vices diametri conjugatæ subibit, si limites, seu vertices eidem præscribantur, ea lege, ut bisecta in ipso centro, media evadat proportionalis inter diametrum, ad quam refertur, & ejus parametrum.*

Quemadmodum in ellipsi conjugata cujusque diametri est recta illa, quæ ducitur per centrum, ejus ordinatis parallela, quæque bifariam secta in eodem centro, media est proportionalis inter ipsam diametrum, & parametrum suam; ita & in hyperbola.

Itaque manentibus omnibus, ut supra, si duæ CK, CL sint æquales inter se, & tota KL media sit proportionalis inter diametrum AB, & ejus parametrum AD; Dico, rectam KL esse conjugatam diametrum ipsius AB.

Hac ratione quadratum cujusvis ordinatæ MN, ad rectangulum ei respondens $AN \times NB$, non modo erit, ut AD ad AB; verum etiam, uti quadratum diametri conjugatæ KL, ad quadratum diametri AB ejusdem ordinatæ.

DEFINITIO.

379. PRæscriptis verticibus conjugatæ diametro, ejus *ordinatas voco semisses earum rectarum, quæ ad hyperbolas oppositas terminatæ, bifariam ab ipsa secantur.*

Notabis autem, hujus diametri proprietatem plane diversam esse ab ea, quæ convenit diametro AB,

cujus ordinatæ ad unam ex hyperbolis dumtaxat terminantur. Nimirum, diametro AB id convenire demonſtravimus, ut quadratum cujuſque ordinatæ MN ſit ad AN $\times$ NB, ſive etiam ad differentiam quadratorum CN, CA; uti quadratum KL ad quadratum AB. At proprietas conjugatæ KL ea eſt, quam demonſtrandam aggredimur.

PROPOSITIO XXIII.

380. *AD conjugatam* KL, *cujuslibet ordinatæ quadratum* MV *eſt ad ſummam quadratorum* CV, CK; *uti quadratum* AB *ad quadratum* KL; *hoc eſt*, $\overline{MV}^2 : \overline{CV}^2 + \overline{CK}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{KL}^2$.

Dem. $\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{KL}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CK}^2 : \overline{CA}^2$; & invertendo, $AN \times NB : \overline{MN}^2 = \overline{CV}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CK}^2$; & addendo terminos ſecundæ rationis terminis primæ, $\overline{CN}^2$, ſive $\overline{MV}^2 : \overline{CV}^2 + \overline{CK}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CK}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{KL}^2$. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXIV.

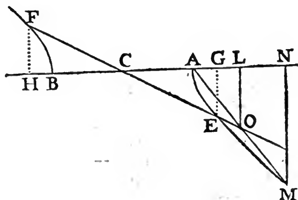
381. *ORdinatæ, quæ ad duas quaſcunque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, dividunt ipſas diametros in eadem ratione.*

Sint

Sint enim AB, EF duæ quævis diametri hyperbolæ. Ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF: Dico, fore BG:AG::FO:EO.

Demonstratio. Extendatur ordinata una AO, donec occurrat hyperbolæ ad partem alteram in M; agaturque per punctum O recta OL, parallela ipsi EG. Et quoniam subtensa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, erit

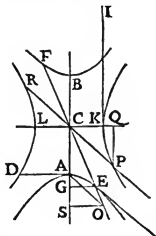
(*n*. 357.) CL:CG::CG:CA.
Est autem CL:CG::CO:CE;
Ergo CG:CA::CO:CE;
& invertendo, CA:CG::CE:CO;
& subducendo antecedentia ex consequentibus, erit
CA:AG::CE:EO;
& sumendo antecedentium dupla, fiet
AB:AG::EF:EO;
& demum componendo, erit BG:AG::FO:EO.
Quod erat &c.



PROPOSITIO XXV.

382. *Iisdem stantibus, ipsæ ordinatæ* EG, AO, *quæ super diametris hyperbolarum oppositarum demittuntur ex alternis earum verticibus, sunt inter se, ut conjugatæ* KL, PR *earumdem diametrorum; hoc est*,
$EG:AO::KL:PR$.

Dem. Quoniam per præced., $BG:AG::FO:EO$; erit dividendo, $AB:AG::FE:EO$; & in utraque analogia permutando, fiet
$AB:FE::AG:EO::BG:FO$;
& compositis ration., $\overline{AB}^2:\overline{FE}^2::AG\times GB:EO\times OF$;
& perm., $\overline{AB}^2:AG\times GB::\overline{FE}^2:EO\times OF$.
Quoniam vero propter hyperbolam,
$\overline{KL}^2:\overline{AB}^2::\overline{EG}^2:AG\times GB$;
erit permutando, $\overline{KL}^2:\overline{EG}^2::\overline{AB}^2:AG\times GB$.
Rursus propter hyp., $\overline{PR}^2:\overline{EF}^2::\overline{AO}^2:EO\times OF$;
hinc permutando, $\overline{PR}^2:\overline{AO}^2::\overline{EF}^2:EO\times OF$;
Ergo ex æquo
$\overline{KL}^2:\overline{EG}^2::\overline{PR}^2:\overline{AO}^2$.
Itaque latera horum quadratorum erunt pariter proportionalia; & consequenter
$KL:EG::PR:AO$;
& propterea permutando, ordinatæ duæ EG, AO erunt inter se, ut conjugatæ diametrorum KL, PR. Quod erat &c.



De

De Asymptotis.

SYNOPSIS.

Diagonales parallelogrammi, circa duos axes descripti, vocantur asymptoti; quæ in infinitum productæ, ita continuo ad hyperbolam accedunt, ut nunquam eidem possint occurrere. Omnis parallela alterutro axi, & cum utraque asymptoto conveniens, ita dividitur, ut rectangulum sub ejus segmentis, æquale sit semper quadrato semisseos axis paralleli. Hinc æquantur inter se omnia hujusmodi rectangula, facta vel a parallelis uni ex axibus, vel ab aliis quibusvis, inter se parallelis, & ad utramque asymptotum pariter terminatis. Hæc parallelarum theoria traducitur ad quamcunque diametrum. Potentia hyperbolæ, ejusque quadratum æquale rectangulis singulis sub duabus parallelis utrique asymptoto, ab eodem puncto perimetri curvæ, & ad utramque asymptotum terminatis. Linearum omnium, quæ vel intra eamdem hyperbolam, vel ab una ad oppositam ducuntur, partes interceptæ ab asymptotis, & curvà, sunt semper inter se æquales. Tangens ab asymptotis terminata, bifariam secatur in puncto contactus. Et vicissim, recta ab asymptotis terminata, & bifariam secta in puncto, in quo hyperbolæ occurrit, tangens est hyperbolæ in eodem puncto. Tangens ad utramque asymptotum terminata, æquatur conjugatæ illius diametri, quæ transit per punctum contactus. Angulus contentus sub asymptotis, est rectus, vel obtusus, vel acutus, prout axis fuerit æqualis, vel minor, vel major axe suo conjugato. In hyperbola æquilatera angulus factus ab asymptotis, est rectus; ejusque ordinatæ quadratum æquatur rectangulo sub sagitta, & lineà composità ex sagitta, & axe. Datis hyperbolæ asympto-

tis, tangentem ducere ad datum punctum. Duae hyperbolae tangentes, ad utramque asymptotum terminatae, secantur in eadem ratione, in puncto, in quo sibi mutuo occurrunt. Asymptoti duarum hyperbolarum oppositarum, sunt pariter asymptoti duarum reliquarum, quae vocantur conjugatae. Hyperbolae conjugatae transeunt per extremitates secundarum diametrorum ex conjugatis duarum reliquarum. Et vicissim.

DEFINITIO.

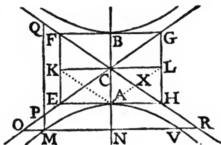
383. RECta AB *referat axem hyperbolae; sitque* KL *ejus axis conjugatus. Circa duos axes* AB, KL *describatur parallelogrammum* EFGH: *Diagonales* EG, FH *hujus parallelogrammi, transeuntes per centrum* C, *voco* Asymptotos.

Hujusmodi nomen diagonales istae sortitae sunt, quia productae in infinitum, etsi continuo ad hyperbolam accedant, nunquam tamen cum ea conveniunt; quod demonstrandum aggredior.

PROPOSITIO XXVI.

384. A*Symptoti in infinitum productae, hyperbolae nunquam occurrunt.*

Demonstratio. Ex quovis puncto M hyperbolae ducatur ad axem ordinata MN: erit $\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{CK}^2$, sive $\overline{AE}^2 : \overline{CA}^2$. Jam vero, si eadem ordinata MN conveniat cum CE in O, erit $\overline{AE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{NO}^2 : \overline{CN}^2$; Ergo



go

go $\overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{NO}^2 : \overline{CN}^2$. Atqui $AN \times NB$ minus ſemper eſt quadrato CN; Ergo quadratum MN minus quoque erit quadrato ipſius NO; hinc punctum O erit ſemper ultra punctum M. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXVII.

385. *Aſymptoti continuo ad hyperbolam accedunt.*

Demonſtratio. Producatur ordinata MN, donec conveniat cum aſymptoto altera CH in puncto R. Et quoniam EH ſecta eſt bifariam in A; ita quoque OR biſecta erit in N; ac proinde, ex Elem.,

$$\overline{NO}^2 - \overline{MN}^2 = OM \times MR.$$

Rurſum, quia $\overline{AE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{MN}^2 : AN \times NB :: \overline{NO}^2 : \overline{CN}^2$; erit quoque $\overline{AE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{NO}^2 - \overline{MN}^2 : \overline{CN}^2 - AN \times NB$,

$:: OM \times MR : \overline{CA}^2$, ex Elem.;

Ergo $\overline{AE}^2 = OM \times MR$.

Quare, ubicunque capiatur ordinata MN, ſi ea producatur ad aſymptotos in punctis O & R, erit rectangulum $OM \times MR$ ejuſdem ubique magnitudinis; unde per receſſum ipſius ordinatæ a vertice A, ſicuti augetur latus unum MR; ita neceſſe eſt, ut minuatur latus alterum MO; & proinde aſymptoti ad hyperbolam continuo accedunt. Quod erat &c.

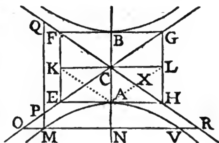
Corollarium.

Hinc hyperbola producta, ad aſymptoton productam ita accedit, ut quovis intervallo dato diſtantia inter utramque minor ſemper ſit futura.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

386. *SI per aliquod hyperbolæ punctum* M *ducatur recta* OR, *vel* PQ, *parallela alterutro axi* KL, *vel* AB, *quæ cum utraque asymptoto conveniat in punctis* O *&* R, *vel* P *&* Q; *Dico, rectangulum sub ejus segmentis, æquale esse quadrato semisseos axis paralleli.*



Demonstratio. Nam I. $OM \times MR = \overline{AE}^2 = \overline{KC}^2$; uti nuper demonstratum est.

II. Rectangulum $PM \times MQ = \overline{CA}^2$. Nam rectangulum $OM \times MR$ ad $PM \times MQ$ est in ratione composita ex MO ad MP, & ex MR ad MQ. Atqui $MO : MP :: AE$, sive $CK : AC$; & rursum $MR : MQ :: AH$, sive $CK : AC$; Ergo ratio rectanguli $OM \times MR$ ad rectangulum $PM \times MQ$, duplicata erit ejus rationis, quam habet CK ad CA;

Itaque $\overline{CK}^2 : \overline{CA}^2 :: OM \times MR : PM \times MQ$.
Est autem, ex demonstratis in Prop. præced.,

$$\overline{CK}^2 = OM \times MR;$$

Ergo $\overline{CA}^2 = PM \times MQ$.
Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

387. Recta AL, vel AK, ducta ab extremitate primi axis ad extremitatem secundi, bifariam dividitur ab asymptoto in puncto X. Nam parallelogrammi rectanguli CAHL diagonales se mutuo bifariam secant in X; & rectæ AX, XL, CX, XH sunt inter se æquales.

Corollarium II.

388. In triangulo rectangulo ACL, est $\overline{AL}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CL}^2$. Sed quadratum ex AX æquatur quartæ parti quadrati ex AL; Ergo $\overline{AX}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{CL}^2$. Plerique Geometræ vocant quadratum ex AX potentiam hyperbolæ.

Corollarium III.

389. Quoniam rectangula omnia $OM \times MR$ sunt singula æqualia quadrato semisseos axis paralleli; erunt quoque inter se æqualia.

PROPOSITIO XXIX.

390. *Si* MV *ordinata ad axem* AB, *utrinque producatur ad asymptotos; pars exterior* VR *ex una parte, æquabitur parti exteriori* MO *ex altera parte.*

Demonstr. Nam propter triangula similia, erit
AH:NR::CA:CN;
& AE:NO::CA:CN;
Ergo AH:NR::AE:NO.
Atqui AH = AE; Ergo NR = NO. Jam vero NV = NM; & proinde residuum VR = MO. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

391. *SI intra asymptotos ducantur duæ, aut plures rectæ, inter se parallelæ*, RS, TV, FE, *quæ hyperbolam, aut hyperbolas oppositas secent; Rectangula* $RH \times HS$, $TI \times IV$, $EG \times GF$ *erunt inter se æqualia.*

Demonstratio. Nam, si a punctis H, I, G ducantur parallelæ secundo axi; triangula similia RHP, TIM, HQS, INV dabunt

$$RH : PH :: TI : MI,$$

& $$HS : HQ :: IV : IN;$$

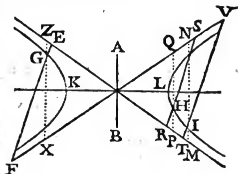
& multiplicatis terminis unius proportionis per terminos alterius, fiet

$$RH \times HS : PH \times HQ :: TI \times IV : MI \times IN.$$

Sed $PH \times HQ = MI \times IN$ (*n.* 389.);

Ergo $RH \times HS = TI \times IV$.

Idemque demonstrabitur de rectangulo $GE \times GF$. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXXI.

392. *SI a duobus punctis* R *&* S, *sumptis in perimetro curvæ*, ut in Figura sequenti, *ducantur duæ, aut plures rectæ, inter se parallelæ* RH, SI, *quæ asymptotum oppositam secent, & similiter parallelæ*

aliæ

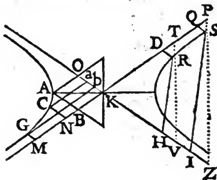
aliæ RD, SQ, *quæ alteram asymptotum pariter secent; Rectangula* HR×RD, IS×SQ *erunt inter se æqualia*.

Demonstratio. Nam, si ab iisdem punctis R & S ducantur TV, PZ, parallelæ secundo axi; triangula similia dabunt HR : RV :: IS : SZ,
& DR : RT :: QS : SP;
& multiplicatis inter se terminis utriusque proportionis, HR×DR : RV×RT :: IS×QS : SZ×SP.
Atqui RV×RT = SZ×SP;
Ergo HR×DR = IS×QS. Quod &c.

Corollarium.

393. SI a duobus, aut pluribus punctis G, C, sumptis in perimetro curvæ, ducantur G*b*, C*a*, GM, CN, parallelæ duabus asymptotis; demonstrabitur eodem modo, rectangula G*b*×GM, C*a*×CN esse æqualia inter se. Cum autem punctum A sit pariter punctum hyperbolæ; similiter demonstrabitur, quodlibet horum rectangulorum æquari rectangulo OA×AB, sive quadrato AB; quia OA = AB. Hinc *rectangulum quodlibet æquabitur quadrato potentiæ hyperbolæ*.

Rursus, quia in hoc casu KN = *a*C, & KM = *b*G; hinc *rectangula* KN×NC, & KM×MG *&c. sunt singula æqualia quadrato* AB, *seu* BK.



PRO-

PROPOSITIO XXXII.

394. *SI a duobus, aut pluribus punctis* Q, P, V, *sumptis in perimetro hyperbolæ, vel hyperbolarum oppositarum, ducantur inter hyperbolas rectæ* V P, Q T *&c., parallelæ inter se; Rectangula* $QR \times QM$, $PN \times PZ$, $VZ \times VN$ *&c. erunt inter se æqualia.*

Demonstratio. A punctis Q & V ducantur parallelæ axi secundo. Triangula similia QRE, VZF, & QGM, VMN dabunt

$$QR:QE::VZ:VF,$$

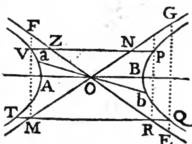
& $$QM:QG::VN:VM;$$

ductisque inter se terminis utriusque proportionis, erit $QR \times QM : QE \times QG :: VZ \times VN : VF \times VM$. Atqui consequentia $QE \times QG$, & $VF \times VM$ sunt inter se æqualia; Ergo æquantur pariter antecedentia $QR \times QM$, & $VZ \times VN$.

Eodem modo demonstrabitur, $PN \times PZ = VZ \times VN$; & proinde tria rectangula esse inter se æqualia. Quod erat &c.

Corollarium.

395. HInc rursus ostenditur, *rectangulum quodlibet* $VZ \times VN$, $QR \times QM$ *&c. æquari quadrato ex* AO, *semisseos axis paralleli*. Nam, si recta VP concipiatur promoveri motu semper parallelo ipsi TQ, donec coincidat super AB; portio ZN, intercepta ab asymptotis, evanescet;



ſcet; & conſequenter rectangulum $VZ \times VN$ transformabitur in $AO \times AO$, hoc eſt, in $\overline{AO}^2$.

Idem demonſtrabitur, ſi rectæ PV, QT eſſent parallelæ cuicunque diametro *ab*.

PROPOSITIO XXXIII.

396. *Iisdem ſtantibus, pars* VZ *rectæ* VP, *æquatur parti* NP.

Demonſtratio. $VZ \times VN = NP \times PZ$.

Jam vero $VN = VP - NP$;

Ergo, ſi ducatur VZ in $VP - NP$, fiet

$$VZ \times VP - VZ \times NP = VZ \times VN.$$

Rurſus $PZ = PV - VZ$;

Ergo $NP \times PV - VZ$,

hoc eſt, $NP \times PV - NP \times VZ = NP \times PZ$;

hinc $VZ \times VP - VZ \times NP = NP \times PV - NP \times VZ$.

Adjiciatur utrique $+ VZ \times NP$: fiet

$$VZ \times VP = NP \times VP;$$

& utrinque dividendo per VP, habebitur

$VZ = NP$. Quod &c.

Corollarium I.

397. Hinc linearum omnium, quæ ab una hyperbola ad alteram ducuntur, partes VZ, NP, interceptæ ab aſymptotis, & curvà, ſunt ſemper inter ſe æquales; & quæ duobus præcedentibus numeris nuper demonſtravimus, extendi debent ad rectas, quæ ſint parallelæ cuicunque diametro.

Corollarium II.

398. Hinc ſequitur etiam, rectangulum $VZ \times ZP = PN \times VN$. Quoniam loco ipſius VZ ſubſtitui poteſt NP &c. Similiter $QR \times RT = VZ \times ZP = PN \times NV$ &c.

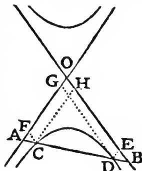
PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

399. *SI ducatur utcunque recta* CD, *utrinque ad asymptotos terminata; Pars* AC, *intercepta ab una asymptoto, & hyperbolà, æquabitur alteri parti* DB, *interceptæ ab altera asymptoto, & hyperbolà.*

Quod attinet ad lineas ductas ab una hyperbola ad alteram, demonstrata res est n. 396. Similiter idem Theorema ostensum est n. 390., respectu ordinatarum ad primum axem. Reliquum jam est, ut eadem veritas demonstretur de lineis quibusvis, quæ non sint ordinatæ ad eumdem axem.

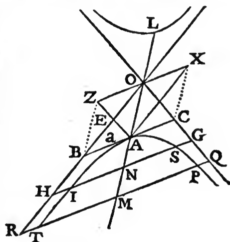
Demonstr. Si negas, fiat DB = AC: Dico, punctum D fore ad hyperbolam. A puncto C ducantur CF, CH, parallelæ duabus asymptotis; & a puncto D pariter DE, DG, iisdem parallelæ. In triangulo AOB, propter parallelas OB, GD, FC, erit AC : AF :: DB : DE, seu GO. Sed per constr., AC = DB; Ergo AF = GO; & consequenter CH = FO, seu AG. Jam vero AF : FC :: AG : GD; Ergo GO : FC :: CH : GD; Itaque GO × GD, seu GO × OE = FC × CH, seu FC × FO; Quamobrem, cum hæc duo rectangula sint æqualia, puncta C & D sunt utraque ad hyperbolam (*n.* 393.); omnesque lineæ, quæ hyperbolam secant, & ad asymptotos terminantur, habent partes interceptas AC, DB æquales. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXXV.

400. *Si per quodvis punctum* A *ducatur tangens* BC, *quæ ad asymptotos terminetur; hæc bifariam secabitur in eodem puncto* A.

Demonstratio. Si a centro O per punctum A ducatur recta OM, hæc secabit hyperbolam. Nam BC tangens unica est, quæ per punctum A duci possit. Præterea eadem recta OM erit diameter, cujus ordinatæ sunt rectæ IS, TP, parallelæ tangenti; & hujusmodi ordinatæ, productæ ad asymptotos, dabunt NG = NH, & MQ = MR. Jam vero propter triangula similia OAC, OMQ, erit AC:MQ::OA:OM;



& propter triangula similia OAB, OMR, erit AB:MR::OA:OM;

Ergo AC:MQ::AB:MR.

Est autem MQ = MR; Ergo AC = AB. Quod &c.

Corollarium I.

401. Et reciproce, *si recta* BC, *ad utramque asymptotum terminata, secetur bifariam in puncto* A, *in quo hyperbolæ occurrit; eadem recta* BC *tan-*

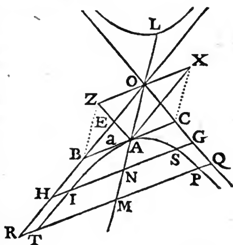
gens erit ipsius hyperbolæ in solo puncto A. Occurrat enim, si fieri potest, eadem recta BC hyperbolæ etiam in alio puncto *a*. Itaque B*a* = AC (*n. 396.*). Sed per hyp., BA = AC; quare B*a*, BA æquales erunt inter se; quod est absurdum.

Corollarium II.

402. Isdem positis, ut in præced. Prop., *rectangula* HI×IG, *&* RT×TQ *sunt singula æqualia quadrato* AB, *semisseos tangentis*. Nam, si concipiatur, quòd recta RQ moveatur versus tangentem, sibi semper parallela; portiones RT, PQ, hinc atque inde interceptæ, continuo augentur; & pars intermedia TP continuo diminuitur, retento tamen eodem semper valore rectanguli RT×TQ; Ergo, evanescente parte intermedia TP, rectangulum RT×TQ definet in BA×AC, hoc est, evadet quadratum semisseos tangentis.

Corollarium III.

403. Si per centrum O ducatur ZX, parallela tangenti, & a puncto A ducantur AZ, AX, parallelæ asymptotis; I. ZX æquabitur tangenti BC; II. Rectangula HI×IG, RT×TQ &c. erunt singula æqualia quadrato ZO, semisseos ejusdem ZX. Quod ope solius schematis



facile

facile ostenditur. III. Perspicuum est etiam ex dictis, *rectam* ZX *æqualem esse conjugatæ ipsius diametri* LA, *quæ transit per punctum contactus* A.

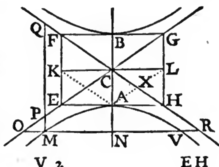
Corollarium IV.

404. HInc asymptoti sunt diagonales, non modo ejus parallelogrammi, quod describitur circa axes conjugatos hyperbolæ, verum etiam cujuslibet alterius parallelogrammi, circa duas quascunque diametros conjugatas descripti. Quare asymptoti hyperbolæ determinari possunt, adhibitis non solum axibus, verum etiam duabus quibusvis aliis diametris conjugatis. Nam diagonales parallelogrammi descripti circa diametros, sunt etiam diagonales parallelogrammi, quod describitur circa axes.

PROPOSITIO XXXVI.

405. A*Ngulus* ECH, *contentus sub asymptotis* CE, CH, *est rectus, vel obtusus, vel acutus; prout axis* AB *fuerit æqualis, vel minor, vel major axe suo conjugato* KL.

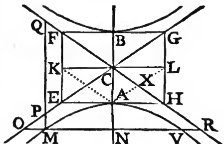
Demonstratio. Sit I. axis AB=KL. Et quoniam recta EH, quæ tangit hyperbolam in puncto A, æqualis est ipsi KL, erit AB=EH; & consequenter EA =AH=CA; Ergo angulus ECH æqualis erit duobus angulis CEH, CHE; atque adeo rectus erit.



II. Sit axis AB < KL. Quoniam

EH = KL, erit AB < EH; & conſequenter CA minor qualibet ipſarum AE, AH; Ergo angulus ECH major erit duobus angulis CEH, CHE; & propterea erit obtuſus.

III. Sit axis AB > KL. Quia EH = KL, erit AB > EH; & conſequenter CA major quoque qualibet ipſarum AE, AH; Ergo angulus ECH minor erit duobus angulis CEH, CHE; & proinde acutus. Quod erat &c.



DEFINITIO.

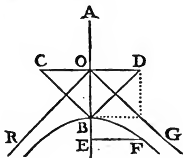
406. *SI axis primus* AB *æquetur ſecundo* CD, *hyperbolam voco* æquilateram.

Corollarium I.

407. HInc *in hyperbola æquilatera angulus* ROG, *factus ab aſymptotis, eſt rectus.* Conſtat ex præcedenti.

Corollarium II.

408. *IN hyperbola æquilatera quadratum ordinatæ* EF *æquatur ſuo rectangulo* EB × EA. Nam quadratum ordinatæ eſt ad ſuum rectangulum correſpondens; uti quadratum ſecundi axis ad quadratum pri-

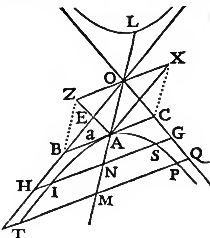


primi. Atqui duo axes sunt æquales; Ergo & horum quadrata æqualia sunt; & consequenter &c.

PROPOSITIO XXXVII.

409. **D**Atis *hyperbolæ asymptotis* OR, OQ, *tangentem ducere ad datum punctum* A.

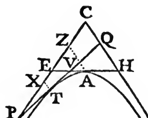
Ex puncto A ducatur recta AZ, parallela asymptoto OQ, & occurrens asymptoto alteri OB in E; tum super eadem asymptoto OB, capiatur portio BE = OE: Dico, rectam BC, ductam per datum punctum A, esse tangentem quæsitam.



Demonstr. Cum enim ex constructione, parallelæ sint rectæ AE, OC; erit BE:OE::BA:AC. Atqui BE = OE; Ergo BA = AC; ac proinde BC est tangens hyperbolæ (*n.* 401.). Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVIII.

410. **D**Uæ *hyperbolæ tangentes* PQ, EH, *ad utramque asymptotum terminatæ, in eadem ratione secantur in puncto* V, *in quo sibi mutuò occurrunt; hoc est*, PV:QV::HV:EV.

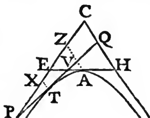


 De-

Demonstratio. Ex puncto contactus T & A, ducantur rectæ TX, AZ, asymptoto CH parallelæ, quæ occurrant asymptoto alteri CE in punctis X & Z. Et quoniam ex demonstratis, $CX \times XT = CZ \times ZA$; erit $CX:CZ::AZ:TX$.

Quia vero tangentes PQ, EH bifariam secantur in punctis contactus T & A; rectæ CP, CE duplæ sunt ipsarum CX, CZ; atque hinc $CX:CZ::CP:CE$. Similiter, ob eamdem rationem, rectæ CH, CQ duplæ sunt ipsarum AZ, TX; & consequenter $AZ:TX::CH:CQ$; Ergo ex æquo $CP:CE::CH:CQ$.

Quare triangula duo PCQ, ECH sunt inter se æqualia ex Elem.; & proinde, ablato communi trapezio CEVQ, erit triangulum $PEV = QHV$. Porro, cum hæc duo triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem, habebunt quoque latera circa æquales istos angulos reciproce proportionalia; & propterea erit $PV:QV::HV:EV$. Quod &c.



DEFINITIO.

411. SI *duæ hyperbolæ oppositæ* C & D, ut in Figura sequenti, *descriptæ fuerint super axe primo* CD, & *secundo* AB, *atque insuper describantur duæ aliæ hyperbolæ* A & B, *quarum axis primus sit* AB, & *secundus* CD; *duæ istiusmodi hyperbolæ* A & B, *vocantur* conjugatæ *duarum* C & D.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

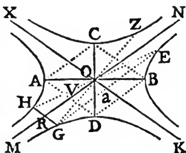
412. *Asymptoti* MN, XK *duarum hyperbolarum* C & D, *sunt pariter asymptoti duarum reliquarum* A & B.

Demonstratio. Nam, si a puncto A ducantur rectæ AC, AD ad secundum diametrum hyperbolarum A & B, perspicuum est, AC bifariam dividi ab asymptoto XK, uti etiam AD ab asymptoto MN; & consequenter XK, MN sunt æqualiter asymptoti duarum reliquarum A & B; quemadmodum sunt asymptoti duarum C & D. Quod erat &c.

PROPOSITIO XL.

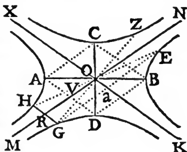
413. *Si a puncto* G *unius ex duabus primis hyperbolis* C & D, *ducatur ad conjugatam proximam recta* GH, *quæ sit parallela uni asymptotorum; Dico, eamdem* GH *bifariam dividi ab altera asymptoto*.

Demonstratio. Rectangulum $GR \times RO = \overline{VD}^2$ (*n*. 393.); & rectangulum $HR \times RO = \overline{AV}^2$. Atqui quadrata ex VD, & ex AV sunt inter se æqualia; Ergo & rectangula; quæ, cum habeant eamdem altitudinem, habebunt bases HR, RG æquales. Eodem modo demonstrabitur, rectam GE bifariam dividi in *a*; Constat itaque propositum.



Corollarium.

414. SI a duobus punctis G & H rectæ GH, parallelæ asymptoto XK, ducantur duæ diametri GZ, HE ad hyperbolas oppositas; manifestum est, GZ fore primam diametrum duarum oppositarum D & C, & HE secundam diametrum conjugatam; & vice versa GZ evadere secundam diametrum oppositarum A & B, & HE primam diametrum conjugatam. Hinc sequitur, *quòd hyperbolæ conjugatæ* A *&* B *transeant per extremitates secundarum diametrorum ex conjugatis* C *&* D; *&* *vicissim istæ per extremitates secundarum diametrorum ex conjugatis* A *&* B.



De mutua Diametrorum inter se comparatione.

SYNOPSIS.

OMnium hyperbolæ diametrorum minima est illa, quæ axis vocatur, & cum suis ordinatis rectos angulos constituit; aliarum vero minor est illa, quæ minus distat ab axe. Conjugatæ diametri per ordinatas super iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione. Quadrata diametrorum conjugatarum sunt inter se, uti rectangula sub abscissa, & compositâ ex abscissa, & diametro. Conjugatæ diametri per ordinatas super iis ductas ex verticibus aliarum, ita dividuntur, ut quadratum ordinatæ ad unam diametrum, æque-

æquetur rectangulo sub alterius ordinatæ abscissa, & lineà compositâ ex eadem abscissa, & diametro conjugata. Crescentibus hyperbolæ diametris primariis, augentur etiam ipsarum conjugatæ. Diameter quævis æqualis est, vel major, vel minor conjugatà ipsius diametro; prout axis æqualis, vel major, vel minor fuerit ipsius conjugato axe. Locus geometricus diametrorum omnium hyperbolæ exhiberi potest per datæ alicujus rectæ portionem. Differentia quadratorum ex axibus conjugatis, æqualis est differentiæ quadratorum ex aliis quibusvis binis diametris conjugatis. Decernitur ratio cujusvis diametri ad suam conjugatam. Crescentibus hyperbolæ diametris, augentur etiam ipsarum conjugatæ. Differentia axium major est differentià diametrorum. Differentia inter binas hyperbolæ diametros conjugatas, eò minor evadit, quò magis ipsæ diametri ab axibus removentur. Parallelogrammum circa duas hyperbolæ diametros conjugatas descriptum, ejusdem ubique est magnitudinis.

PROPOSITIO XLI.

415. *Omnium hyperbolæ diametrorum minima est ea, quæ cum suis ordinatis rectos angulos constituit, & proinde axis vocatur.*

Esto A B axis hyperbolarum oppositarum; & sit etiam E F quævis alia diameter earumdem; Dico, diametrum istam E F majorem esse axe AB.

Demonstratio. Ad axem A B demittatur ordinata E G. Portio C G major erit semiaxe C A; quia ordinata E G cadit infra verticem A. Sed ob angulum

gulum rectum CGE, semidiameter CE major est portione CG; hinc multo major erit semiaxe CA; Ergo diameter tota EF major erit axe integro AB. Quod erat &c.

PROPOSITIO XLII.

416. *Omnium aliarum diametrorum minor est illa, quæ minus distat ab axe.*

Demonstratio. Iisdem stantibus,

$$\overline{CE}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2.$$

Sed $$\overline{CG}^2 = \overline{CA}^2 + AG \times GB;$$

Ergo $$\overline{CE}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{EG}^2 + AG \times GB.$$

Itaque excessus, quo CE quadratum superat quadratum CA, est quadratum $EG + AG \times GB$. Sed utrumque minuitur, quò magis punctum E accedit ad punctum A; Ergo excessus ille eò minor erit, quò minus distant a se invicem puncta duo A & E. Minuitur itaque quadratum CE, dum punctum E accedit ad A; hinc ipsa CE similiter diminuitur; & proinde diameter quoque EF, dupla ipsius CE. Omnium ergo aliarum diametrorum minor est illa &c.

Scholion.

Quomodo autem crescentibus hyperbolæ diametris in recessu ab axe, augeantur pariter ipsarum conjugatæ,

jugatæ, jam demonstrabitur, præmisso sequenti Theoremate.

PROPOSITIO XLIII.

417. *Conjugatæ diametri per ordinatas super iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.*

Capiantur in hyperbola duæ quævis conjugatæ diametri AB, KL; ad quas demittantur ordinatæ EG, PQ ex verticibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum EF, PR: Dico,

BG:AG::LQ:KQ.

Demonstratio. Ad diametrum EF ducatur ordinata AO; & per punctum O agatur recta OS, parallela ipsi EG. Jam vero CK ad CQ rationem habet compositam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ. Est autem (*n*. 382.) CK:CP::KL:PR::EG:AO;
& rursum CP:CQ::AO:OS;
Ergo CK ad CQ rationem habet compositam ex EG ad AO, & ex AO ad OS. Et quoniam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, sive CE ad CO; erit ex æquo

CK:CQ::CE:CO;

& subducendo antecedentes ex consequentibus, erit

CK:KQ::CE:EO;

& sumptis antecedentium duplis,

KL:KQ::EF:EO;

& componendo, LQ:KQ::FO:EO.
Cum autem FO:EO::BG:AG (*n*.381.);
erit rursus BG:AG::LQ:KQ.
Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

418. *Quadrata diametrorum conjugatarum sunt inter se, uti rectangula sub abscissa, & composità ex abscissa, & diametro; nimirum,*

$\overline{AB}^2 : \overline{KL}^2 :: AG \times GB : KQ \times QL.$

Dem. Cum enim $BG : AG :: LQ : KQ$;
erit dividendo, $AB : AG :: KL : KQ$;
& permutando, $AB : KL :: AG : KQ :: BG : LQ$;
& compositis rationib., $\overline{AB}^2 : \overline{KL}^2 :: AG \times GB : KQ \times QL.$
Quod erat &c.

PROPOSITIO XLV.

419. *Manente eadem Theorematis constructione, quadratum ordinatæ* EG *æquatur rectangulo* $KQ \times QL$; *& quadratum ordinatæ* PQ *æquatur rectangulo* $AG \times GB$.

Demonstratio. Ex natura hyperbolæ,

$\overline{AB}^2 : \overline{KL}^2 :: AG \times GB : \overline{EG}^2 :: \overline{PQ}^2 : KQ \times QL$;
Ergo per præced.,

$AG \times GB : KQ \times QL :: AG \times GB : \overline{EG}^2$;

hinc $AG \times GB : KQ \times QL :: \overline{PQ}^2 : KQ \times QL$;
ac propterea rectangulo $KQ \times QL$ æquale erit quadratum EG; & rectangulo $AG \times GB$ æquale erit quadratum PQ. Quod erat &c.

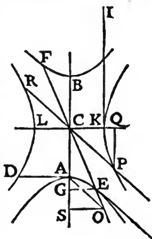
PRO-

PROPOSITIO XLVI.

420. *Stante superiori constructione, si* AB, KL *sint duo axes conjugati, quorum ordinatæ ad angulos rectos sint* EG, PQ; *sintque præterea* EF, PR *duo diametri conjugatæ; Dico, differentiam quadratorum* EF, AB, *æqualem esse differentiæ quadratorum* PR, KL.

Demonstratio. Nam, uti nuper demonstravimus, excessus, quo quadratum CE superat quadratum CA, est $\overline{EG}^2 + AG \times GB$. Sed $AG \times GB = \overline{PQ}^2$, per præced.; Ergo excessus, quo quadratum CE superat quadratum CA, erit $\overline{EG}^2 + \overline{PQ}^2$.

Similiter excessus, quo quadratum CP superat quadratum CK, est $\overline{PQ}^2 + KQ \times QL$. Atqui $KQ \times QL = \overline{EG}^2$; Ergo excessus, quo quadratum CP superat quadratum CK, erit pariter eadem summa quadratorum $\overline{EG}^2 + \overline{PQ}^2$.



Quamobrem, cum ipsarum CE, CA, & CP, CK duplæ sint EF, AB, & PR, KL; hinc differentia quadratorum EF, AB, æqualis erit differentiæ quadratorum PR, KL. Quod erat &c.

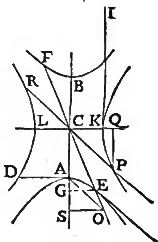
PRO-

PROPOSITIO XLVII.

421. *Crescentibus hyperbolæ diametris primariis, augentur etiam ipsarum conjugatæ.*

Sit enim AB axis hyperbolæ, KL ejus conjugatus, EF diameter quævis primaria, & PR ipsius conjugata; Dico, diametrum EF non posse majorem fieri, nisi etiam augeatur ejus conjugata PR.

Demonstratio. Nam per præced., $\overline{EF}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{PR}^2 - \overline{KL}^2$; quare, si prior excessus augetur, augeatur oportet etiam secundus. Jam vero, per recessum ab axe AB, major evadit diameter EF; augeturque excessus, quo quadratum EF superat quadratum AB; Ergo in eodem recessu necesse est, ut augeatur etiam excessus, quo quadratum PR superat quadratum KL; Itaque conjugata PR major quoque evadet. Quod erat &c.



PROPOSITIO XLVIII.

422. *Diameter quævis* EF *æqualis est, vel major, vel minor conjugatâ ipsius diametro* PR; *prout axis* AB *est æqualis, vel major, vel minor conjugato ipsius axe* KL.

Demonstratio. I. Ponatur axis AB = KL. Dico, diametrum EF adæquare conjugatam suam PR. Nam, si ma-

si major, vel minor esset, differentia quadratorum EF, AB, major quoque, vel minor esset differentià quadratorum PR, KL; quod repugnat n. 420.

II. Si axis AB major minorve sit suo conjugato KL; etiam diameter EF major minorve erit suà conjugatà PR, propter eamdem rationem. Constat itaque propositum.

PROPOSITIO XLIX.

423. *Locus geometricus diametrorum omnium hyperbolæ exhiberi potest per datæ alicujus rectæ portionem.*

In triangulo ABC, rectangulo in B, hypotenusa AC referat axem majorem, & latus BC axem alterum minorem; porro latus hoc BC protendatur versus X; Dico, portionem ejus CX considerari posse, veluti locum omnium diametrorum hyperbolæ.

Demonstratio. Nam I. ex demonstratis, quælibet diameter, quæ ad eas hyperbolas terminatur, in quibus axis AC habet suos terminos, major esse debet ipso axe AC. Atqui omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad rectam CX, majores sunt ipsà AC; Itaque poterunt rectæ istæ earum hyperbolarum diametros omnes exhibere.

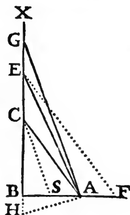
II. Si recta AE sit aliqua earum diametrorum; ejus conjugata erit BE; quippe quæ talis esse debet ex demonstratis, ut excessus, quo ipsius quadratum BE superat quadratum BC, sit æqualis excessui, quo quadratum AE superat quadratum AC. Quod ita ostenditur.

Nam

Nam $\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CE}^2 + 2 BC \times CE$; Ergo excessus, quo quadratum BE superat quadratum BC, erit $\overline{CE}^2 + 2 BC \times CE$. Sed hujusmodi est etiam excessus, quo quadratum AE superat quadratum AC; Quare differentia quadratorum BE, BC, æqualis erit differentiæ quadratorum AE, AC; & propterea, sicuti BC est axis conjugatus ipsius AC; sic BE erit conjugata diametri AE. Constat itaque propositum.

PROPOSITIO L.

424. D*ifferentia quadratorum ex axibus conjugatis* AC, BC, *æqualis est differentiæ quadratorum ex aliis quibusvis binis diametris conjugatis* AE, BE.



Demonstratio. In triangulo rectangulo ABC, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; Ergo differentia quadratorum AC, BC, æquatur quadrato ipsius AB. Similiter in triangulo rectangulo ABE, $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$; Itaque differentia quadratorum AE, BE, est idem quadratum AB. Quod erat &c.

PROPOSITIO LI.

425. S*I axis* AC *hyperbolæ major sit suo conjugato* BC; *Ratio ejusdem axis* AC *ad suum conjugatum* BC, *major est ratione, quam habet quævis alia diameter* AE *ad suam conjugatam* BE; *hoc est*,

$$AC:BC > AE:BE.$$

De-

Demonstratio. Per punctum E ducatur recta EF, parallela ipsi AC: erit AC:BC::FE:BE. Sed FE major est, quàm AE; Quare FE ad BE majorem rationem habet, quàm AE ad BE; Ergo etiam AC:BC > AE:BE. Quod erat &c.

Corollarium I.

426. SImili methodo demonstrabitur, quòd, si fuerit AG quævis alia hyperbolæ diameter, remotior ab axe AC; *ratio, quam habet diameter* AE, *axi propinquior, ad suam conjugatam* BE, *major sit ratione, quam habet diameter* AG, *ab axe remotior, ad conjugatam suam* BG.

Corollarium II.

427. SI axis hyperbolæ minor sit suo conjugato; *ratio axis ad suum conjugatum, minor erit ratione, quam quævis alia diameter habet ad conjugatam suam*. Nam, stante eadem constructione, erit BC:AC::BE:FE. Est autem FE > AE; atque adeo BE:FE < BE:AE; Quare BC:AC < BE:AE.

Corollarium III.

428. HInc similiter demonstratur, quòd, si fuerit quævis alia hyperbolæ diameter BG, remotior ab axe BC; *ratio, quam habet diameter* BE, *axi propinquior, ad suam conjugatam* AE, *minor sit ratione, quam habet diameter* BG, *ab axe remotior, ad conjugatam suam* AG.

Corollarium IV.

429. Itaque *crescentibus hyperbolæ diametris, augentur etiam ipsarum conjugatæ*; & consequenter tam summa, quàm rectangulum ex binis hyperbolæ diametris conjugatis, eò magis augetur, quò magis ipsæ diametri ab axibus recedunt.

PROPOSITIO LII.

430. *Differentia axium* AC, BC, *major est differentià diametrorum* AE, BE.

Manente eadem constructione, extendatur CB in H, ita ut AC$=$CH. Jamque, si demonstretur, AE minorem esse, quàm EH; erit differentia axium AC, BC, major differentià diametrorum AE, BE.

Demonstratio. Jungatur AH. Quoniam duæ rectæ AC, CH sunt æquales inter se, erit angulus CAH æqualis angulo CHA; Sed angulus EAH major est angulo CAH; Quare angulus EAH major quoque est angulo EHA; Ergo AE minor est, quàm EH. Quod erat &c.

X
G
E
C
B S A F
H

Corollarium.

431. Hinc differentia diametrorum AE, BE, axibus propinquiorum, major est differentià diametrorum AG, BG, ab iisdem axibus remotiorum; quare *differentia inter binas hyperbolæ diametros* con-

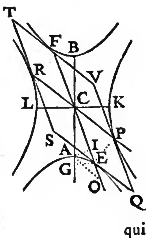
conjugatas, eò minor evadit, quò magis ipsæ diametri ab axibus removentur.

PROPOSITIO LIII.

432. P*Arallelogrammum, circa duas hyperbolæ diametros conjugatas* EF, PR *descriptum, ejusdem ubique magnitudinis est, nimirum, semper æquale rectangulo, quod sub ipsis axibus* AB, KL *continetur.*

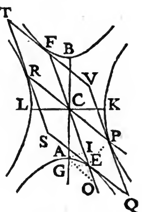
Per puncta E & F, & pariter P & R ducantur parallelæ, quæ circa diametros conjugatas EF, PR conficiant parallelogrammum QSTV: Dico, hoc æquari rectangulo, quod sub axibus AB, KL continetur.

Demonstratio. Ab alternis verticibus A & E, demittatur ad axem AB ordinata EG, & ad diametrum EF ordinata AO: erit (*n.* 382.) EG:AO:: KL:PR::CK:CP. Demittantur rursum super CE, CP, perpendiculares AI, EP: erit EG:AO in ratione composita ex EG:AI, & ex AI:AO. Sed EG:AI::CE:CA, propter triangula similia CGE, CIA; & AI:AO::EP:CE, propter triangula similia AIO, CEP; Ergo EG:AO est in ratione composita ex CE:CA, & ex EP:CE; hoc est, CK:CP rationem habet compositam ex EP:CE, & ex CE:CA. Sed duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EP:CA; Quare CK:CP::EP:CA; & consequenter CP × EP = PCEQ = CA × CK. At-



 qui

qui parallelogrammum QSTV quadruplum eſt parallelogrammi PCEQ; & rectangulum ſub axibus AB, KL quadruplum eſt rectanguli CA × CK; Ergo parallelogrammum QSTV æquale erit rectangulo ſub axibus AB, KL. Quod erat &c.



De Parametris Diametrorum, inter ſe mutuo comparatis.

SYNOPSIS.

Decernitur ratio parametrorum inter ſe, quæ ad ſuas diametros conjugatas referuntur. Eadem theoria traducitur ad parametros, quæ ad diametros quaslibet non conjugatas pertineant. Differentia inter quadratum alicujus diametri, & ejus figuram, ut vocant, eſt ſemper eadem; quocunque in loco capiatur diameter. Duæ quævis hyperbolæ diametri ſunt reciproce proportionales differentiis laterum ſuarum figurarum. Ex binis quibuſvis diametris illa, quæ major eſt, majorem parametrum habet. Omnium parametrorum minima eſt illa, quæ refertur ad axem. Hæc tamen proprietas vera eſt in iis dumtaxat diametris, quæ majores ſunt ſuis parametris. Sin autem diametri parametris ſuis minores fuerint, res longe aliter ſe habet; & duo caſus diſtinguuntur, ac demonſtrantur.

Defi-

Definiuntur itaque parametri diametrorum omnium; & locus geometricus exhibetur.

PROPOSITIO LIV.

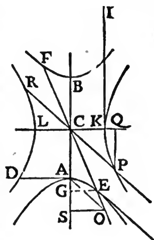
433. **D***Uæ quævis diametri conjugatæ, sunt continue proportionales cum suis parametris, ubi inverso ordine inter eas collocentur.*

Sint enim AB, KL binæ quælibet diametri conjugatæ; sit autem AD parameter diametri AB, & KI parameter diametri KL; Dico, esse in proportione continua :: AD.KL.AB.KI.

Demonstratio. Quoniam KL est diameter conjugata ipsius AB, erit AD:KL::KL:AB. Et similiter, quoniam AB est conjugata ipsius KL, erit KL:AB::AB:KI. Ergo continue proportionales sunt AD, KL, AB, KI. Quod erat &c.

Corollaria.

434. I. **S**I duæ conjugatæ diametri AB, KL fuerint inter se æquales; etiam parametri AD, KI erunt inter se, & diametris suis æquales.



II. Si vicissim fuerint inæquales; parametri quoque erunt inæquales inter se, & cum qualibet earum diametrorum.

III. Ex diametris AB, KL, illa, quæ major est, habet parametrum minorem, tum parametro, tum diametro altera; illa vero, quæ minor est, habet parametrum etiam majorem diametro altera.

IV. Si inæquales fuerint diametri A B, K L, & inæquales proinde ipsarum parametri A D, K I; summa parametrorum major est semper summâ diametrorum.

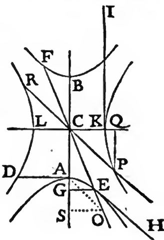
V. Si capiatur differentia, quam habent binæ diametri conjugatæ cum suis parametris; illa quidem differentia major est, quæ ad minorem diametrum, & majorem proinde parametrum refertur.

Scholion.

SI diametri non fuerint conjugatæ, sed ad easdem hyperbolas terminentur; poterit de earum parametris, invicem comparatis, theoria sanciri, præmisso sequenti Theoremate.

PROPOSITIO LV.

435. *IN hyperbola differentia inter quadratum alicujus diametri* A B, *&* *ejus figuram, quæ constituitur per rectangulum* D A × A B, *est semper eadem; quocunque in loco capiatur diameter* A B.



Demonstratio. Nam differentia quadratorum ex diametris conjugatis A B, K L, est semper æqualis differentiæ quadratorum ex axibus (*n.* 424.). Sed quadratum ex K L est æquale rectangulo D A × A B; Ergo eadem pariter ubique erit differentia inter A B quadratum, & rectangulum D A × A B. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

436. *Duæ quævis hyperbolæ diametri sunt reciproce proportionales differentiis laterum suarum figurarum.*

Diametri AB esto parameter AD; & cujusvis alterius diametri EF parameter sit EH: Dico,

AB:EF::EF—EH:AB—AD.

Demonstratio. Nam, uti demonstratum est, differentia inter quadratum alicujus diametri, & ejus figuram, est eadem ubique; Ergo differentia inter quadratum AB, & rectangulum DA×AB, æqualis erit differentiæ inter quadratum EF, & rectangulum HE×EF. Atqui differentia inter quadratum AB, & rectangulum DA×AB, tantundem valet, ac rectangulum ex AB in differentiam ipsarum AB—AD; & similiter differentia inter quadratum EF, & rectangulum HE×EF, perinde est, ac rectangulum ex EF in differentiam ipsarum EF—EH; Quare, cum æqualia sint inter se duo ista rectangula, erit

AB:EF::EF—EH:AB—AD.

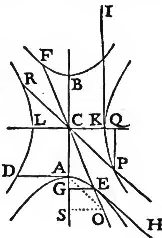
Quod erat &c.

PROPOSITIO LVII.

437. *Iisdem stantibus, ut supra, ex binis diametris, ad easdem hyperbolas terminatis, illa, quæ major est, majorem parametrum habet.*

Esto diameter AB minor diametro EF: Dico, parametrum AD, quæ refertur ad diametrum minorem, esse etiam minorem parametro EH, quæ refertur ad diametrum majorem.

Demonstratio. Nam per præced., AB:EF::EF—EH:AB—AD; Quare, ficuti AB minor eft, quàm EF; ita EF—EH minor erit, quàm AB—AD. Differentia igitur inter diametrum EF, & parametrum fuam EH, eft minor differentià, quæ eft inter diametrum AB, & parametrum fuam AD. Atqui EF major eft, quàm AB, per hyp.; Ergo EH multo major erit, quàm AD. Quod erat &c.



Corollarium.

438. SIcuti omnium diametrorum hyperbolæ minima eft illa, quæ axis vocatur; fic *omnium parametrorum minima eft illa, quæ refertur ad axem*. Et quemadmodum omnes aliæ diametri, in receffu ab axe, continuo augentur; fic & parametri earumdem, in eodem receffu, majores quoque femper evadunt.

Monitum.

439. HÆc proprietas vera tantummodo eft in iis diametris, quæ majores funt fuis parametris; *nam allata demonftratio in illis dumtaxat locum obtinet. At vero res longe aliter fe habet in diametris illis, quæ parametris fuis funt minores. Qua in re duo cafus funt diftinguendi.*

Primus cafus eft, cum quadratum axis non eft minus

minus dimidio quadrati, quod fit ex suo conjugato. *In hoc casu minima quidem parameter est illa, quæ refertur ad axem; aliarum vero illæ semper minores sunt, quæ ad diametros pariter minores referuntur; ita ut universaliter hic quoque verum sit, quòd*, crescentibus diametris, augeantur etiam parametri ipsarum.

Alter casus est, cum quadratum axis minus est dimidio quadrati, quod fit ex suo conjugato. *In hoc casu, inventa diametro, cujus quadratum adæquat semissem quadrati, quod fit ex ejus conjugata, erit parameter istius diametri omnium minima; &* aliarum illæ semper minores erunt, quæ referuntur ad diametros, minus ab illa distantes.

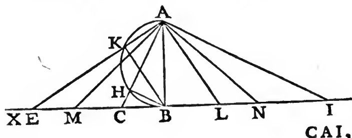
Ut autem utriusque casus veritas demonstretur, præmitto sequens Theorema.

PROPOSITIO LVIII.

440. D*Efiniuntur parametri diametrorum.*

In triangulo rectangulo ABC, latus BC referat axem hyperbolæ, & hypotenusa AC ejus conjugatum axem. Ex demonstratis n. 423., si BE exhibeat aliam quamvis diametrum, exhibebit AE conjugatam illius; quare, si super ipsis AC, AE erigantur perpendiculares AI, AL, fiet CI parameter axis BC, & EL parameter axis BE.

Demonstratio. Cum enim in triangulo rectangulo



CAI,

CAI, ex angulo recto A demissa sit ad hypotenusam CI perpendicularis AB, erit BC:AC::AC:CI. Atqui parameter axis BC, est tertia proportionalis post ipsum axem, & ejus conjugatum; Ergo, cùm AC sit conjugatus axis ipsius BC, erit CI parameter ejusdem axis BC.

Eadem ratione, quoniam in triangulo rectangulo EAL, ex angulo recto A demissa est ad hypotenusam EL perpendicularis AB, erit BE:AE::AE:EL. Atqui parameter diametri BE, est tertia proportionalis post ipsam diametrum, & ejus conjugatam; Ergo, cùm AE sit conjugata diametri BE, erit EL ejusdem diametri parameter. Quod erat &c.

Corollarium I.

441. Itaque, sicuti CI est parameter axis BC; ita EL est parameter diametri BE. Et quoniam æquales sunt anguli CAI, EAL, qui cruribus suis abscindunt ex eadem indefinita IX portiones CI, EL; hinc habemus *angulum rectilineum, qui vertitur circa verticem suum, & ex recta, positione datà, cruribus suis perpetuo portionem aliquam abscindit, quæ vicem parametri subeat.*

A
K
H
X E M C B L N I

Co-

Corollarium II.

442. Quare, si MAN sit positio anguli recti, in qua ipsius crura æqualia fiunt; erit portio MN omnium minima; tum item aliarum illæ semper minores erunt, quæ ad ipsam MN magis accedunt.

Corollarium III.

443. His præjactis, facile consequitur demonstratio prædictorum casuum, quæ huc tandem redit, ut demonstretur, *quadratum axis* BC *non minus esse dimidio quadrati, quod fit ex suo conjugato* AC, *quoties* BC *non minor est, quàm* BM; *esse vero minus, quoties, vice versa,* BC *minor est, quàm* BM.

Nam, propter æquales AM, AN, sunt etiam æquales duæ AB, BM. Quare, quoties BC non minor est, quàm BM, nec etiam minor erit, quàm AB; Ergo ejusdem quadratum nec pariter minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC.

Vicissim, cùm BC minor est, quàm BM, erit BC minor quoque, quàm AB; Ergo quadratum ipsius BC, minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC.

PROPOSITIO LIX.

444. D*efiniuntur parametri diametrorum, quæ parametris suis sunt majores.*

Quemadmodum, si erigantur super ipsis AC, AE, perpendiculares AI, AL, fiunt CI, EL parametri ipsarum BC, BE; ita, si demittantur super iisdem AC, AE, perpendiculares BH, BK, fiunt portio-

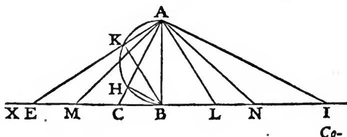
portiones CH, EK parametri, quæ referuntur ad ipsas AC, AE.

Demonstratio. Quoniam in triangulo rectangulo ABC, ex angulo recto B demissa est ad hypotenusam AC perpendicularis BH, erit AC:BC::BC:CH. Atqui parameter axis AC, est tertia proportionalis post ipsum axem, & ejus conjugatum; Ergo, cùm BC sit conjugatus axis ipsius AC, erit CH parameter ejusdem axis AC.

Similiter, quoniam in triangulo rectangulo ABE, ex angulo recto B demissa est ad hypotenusam AE perpendicularis BK, erit AE:BE::BE:EK. Sed parameter diametri AE, est tertia proportionalis post ipsam diametrum, & ejus conjugatam; Quare, cùm BE sit conjugata diametri AE, erit EK ejusdem diametri parameter. Quod erat &c.

Corollarium I.

445. HInc *definiri potest locus parametrorum, quæ referuntur ad diametros* AC, AE. Nam, si super AB, tanquam diametro, semicirculus describatur; hic transibit per illa eadem puncta, in quæ cadunt perpendiculares BH, BK; quare suæ circumferentiæ portio AH considerari poterit, veluti locus parametrorum, quæ referuntur ad diametros AC, AE.



Co-

Corollarium II.

446. **H**Inc rursus apparet, quòd, crescentibus hisce diametris, augeri quoque debeant parametri ipsarum.

De Axibus, Focis, Diametris, Parametris, Asymptotis, & Hyperbolis similibus inveniendis, ac de mensura Hyperbolæ.

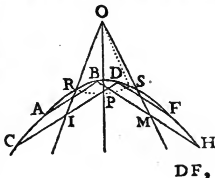
SYNOPSIS.

IN *data hyperbola invenire duos axes, ejusque focum, & parametros axium, & asymptotos; & datis axibus, duas diametros conjugatas invenire, quæ datam habeant rationem, vel, quæ datum rectangulum contineant. Super axe primo dato describere hyperbolam, datæ similem. Dimensio hyperbolæ.*

PROPOSITIO LX.

447. **I**N *data hyperbola invenire duos axes, ejusque focum, & parametros axium, & asymptotos.*

Resolutio. Ducantur duæ, aut plures lineæ AB, CD, parallelæ inter se; & per earum punctum medium trajiciatur recta IO, quæ proinde erit diameter. Similiter totidem aliæ parallelæ ducantur

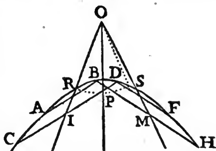


DF,

DF, BH; & per earum medium traducatur recta altera MO, quæ pariter erit diameter; & punctum O, in quo se se intersecant ambæ diametri, erit centrum hyperbolæ.

Si alterutra harum diametrorum sit perpendicularis parallelis, quas bifariam secat; hæc erit etiam axis quæsitus.

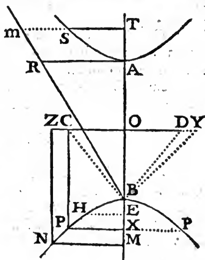
Si vero neutra sit perpendicularis iisdem, facto centro in O, & intervallo alterutrius semidiametri OR, describatur arcus RS, qui secabit hyperbolam in alio puncto S. Cum enim OR non sit semiaxis, erit major semiaxe, qui minimus est omnium semidiametrorum; uti constat ex genesi hyperbolæ. Præterea recta OS erit etiam semidiameter; quippe quæ transit per centrum; contra quàm accidat tangentibus, ductis a puncto S hyperbolæ, quæ necessario secant axem inter centrum, & ejus verticem. Denique, cum diameter SO sit æqualis diametro RO, utraque distabit æqualiter a vertice hyperbolæ; quod pariter perspicuum est ex genesi hujus curvæ. Quamobrem, si arcus RS secetur bifariam in P, recta PO erit axis quæsitus.



Inventa semissi primi axis, a puncto O excitetur recta OY, perpendicularis, & æqualis eidem semiaxi; ducaturque BY; tum fiat OX = BY. Ordinata PX æqualis erit semiaxi secundo (*n.* 344.); atque adeo, si transferatur PX ab O in C, & ab O in D, recta CD erit secundus axis. Atque ita tertia porportionalis primo axi, & secundo, erit parameter

rameter primi; & tertia proportionalis ſecundo, & primo, erit parameter ſecundi. Diſtantia autem BD, traducta ab O in E, dabit focum in puncto E (*n.* 336.).

Denique, ut habeantur aſymptoti, rectæ BD, BC ſecentur ſingulæ biſariam; & a puncto O per puncta diviſionum ducantur rectæ; quæ erunt aſymptoti quæſitæ (*n.* 387.). Quod erat &c.

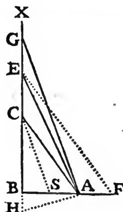


PROPOSITIO LXI.

448. D*Atis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter ſe.*

Reſolutio. In triangulo rectangulo ABC, hypotenuſa AC referat axem majorem, & latus BC axem minorem, ut in conſtructione n. 423.

Ex demonſtratis eodem n. 423., reſolutio Problematis eò reducitur, ut, pro-

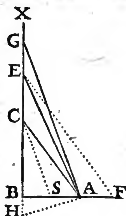


ductà

ductâ BC versus X, inveniatur in recta CX tale punctum E; ut AE ad BE sit in data illa ratione. Itaque, quia ductâ CS, ipsi AE parallelâ, fit AE: BE::CS:BC; erit CS ad BC similiter in data illa ratione. Unde solvetur propositum Problema, applicando intra angulum ABC rectam CS, quæ ad axem minorem BC habeat datam rationem, & ducendo per punctum A rectam AE, ipsi CS parallelam.

Monitum.

N*Otabis, in resolutione propositi Problematis illud a nobis assumptum fuisse, ut ratio data sit majoris ad minus; unde, si fuerit minoris ad majus, necesse est, ut ea invertatur. Constat etiam, rationem datam, minorem esse debere illà, quam habet axis major ad axem minorem; quia aliter punctum* E *reperiretur in ipso axe minore* BC; *atque adeo Problema esset impossibile.*



PROPOSITIO LXII.

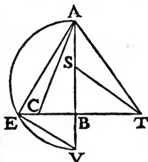
449. D*Atis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.*

Resol. In triangulo rectangulo ABC, hypotenusa AC referat, ut ante, axem majorem, & latus BC axem minorem. Producatur CB versus T; ita ut AB

×BT

$\times BT$ ſit rectangulum datum; quod quidem majus eſſe debet rectangulo $AC \times CB$; tum ſecetur AB bifariam in S; & junctâ ST, extendatur AB verſus V, ita ut $SV = ST$; & denique ſuper AV deſcribatur ſemicirculus AEV: Dico, rectas AE, BE eſſe diametros quæſitas.

Demonſtratio. $\overline{ST}^2 = \overline{SV}^2$. Sed $\overline{ST}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{BT}^2$; & $\overline{SV}^2 = AV \times VB + \overline{BS}^2$; Ergo $\overline{BS}^2 + \overline{BT}^2 = AV \times VB + \overline{BS}^2$; & dempto communi quadrato $\overline{BS}^2$, ſupererit $\overline{BT}^2 = AV \times VB$. Jungatur VE: erit $AV \times VB = \overline{VE}^2$; hinc $\overline{BT}^2 = \overline{VE}^2$. Quare, cum duæ VE, BT inter ſe ſint æquales, erit $AB \times BT = AB \times VE$. Sed rectangulum $AB \times VE = AE \times EB$; quia $AB : AE :: BE : VE$; Ergo $AE \times EB = AB \times BT$; ac propterea duæ AE, BE erunt quæſitæ diametri. Quod erat &c.



PROPOSITIO LXIII.

450. *Super axe primo dato deſcribere hyperbolam, datæ ſimilem.*

Reſol. Fiat: ut axis primus hyperbolæ datæ ad ſecundum, ita axis datus ad ſecundum quæſitum; quo invento, deſcribatur hyperbola: quæ erit datæ ſimilis.

Demonſtratio eadem eſt, quæ pro ellipſi.

Corollarium.

451. Itaque hyperbolæ non ſunt omnes inter ſe ſimiles. Ut autem tales efficiantur, opus eſt, ut duo axes ſint proportionales.

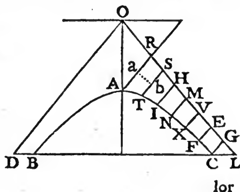
PROPOSITIO LXIV.

452. H*Yperbolam metiri*.

Hactenus inventus non est geometricus modus inveniendi aream hyperbolæ, ab ordinata BC terminatæ. Ad eamdem tamen per approximationem possumus accedere; veluti de circuli area.

Resolutio. Quærantur axis, & asymptoti OD, OL; & a vertice A ducatur AR, parallela asymptoto DO; divisàque rectà RL in partes æquales, sed, quoad fieri poterit, minores, ducantur parallelæ ST, HI, MN &c. Rectangula OS×ST, OH×HI, OM×MN &c., singula sunt æqualia quadrato AR (*n.* 393.); quare, si valor quadrati AR dividatur per OS, habebitur valor ipsius ST. Similiter, si dividatur valor quadrati AR per OH, habebitur valor HI &c.

Inventis itaque valoribus omnibus parallelarum ST, HI &c., spatiola ARST, TSHI &c. considerari poterunt, veluti totidem trapezoides; nam partes AT, TI, IN &c. ejusdem curvæ, cum sint minimæ, instar rectarum linearum considerari possunt. Quamobrem mensurentur trapezoides singulæ, quemadmodum docuimus in Elem. Geom.; idest, accipiatur semissis utriusque rectæ AR & TS; & harum semissium summa multiplicetur per altitudinem *ab*: productum erit valor



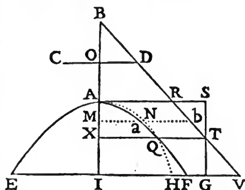
lor trapezoidis ARST; idemque fiat de reliquis. Menſuretur præterea triangulum CGL, & triangulum ARO: horum omnium ſumma dabit valorem ſpatii OACL; quo duplicato, habebitur ſpatium DOLCAB. Denique menſuretur triangulum DOL; & ab ejus area auferatur valor inventus DOLCAB: reſiduum erit area hyperbolæ. Quod erat &c.

Aliter.

453. HÆc methodus maxime accedit ad juſtum valorem, qui quæritur. Quia vero multiplicem calculum poſtulat, variaſque operationes, in quas proclive eſt errores irrepere, aliam ſimpliciorem methodum ſubjicio, & æque exactam.

Quæratur parameter AR primi axis; & ab extremitate A excitetur perpendicularis AB; & ab altera extremitate B ducatur per R recta BV; tum ſecetur RV bifariam in T, per quod traducatur SG, parallela primo axi, & TX perpendicularis eidem. His poſitis,

Quadratum ordinatæ XQ æquatur abſciſſæ AX × XT. Si vero XT, ſive AS accipiatur pro parametro parabolæ, cujus ſummitas ſit in A; erit quoque XQ ordinata ad eamdem parabolam; nam $\overline{XQ}^2 = AX \times AS$. Hyperbola itaque, & parabola ſibi occurrunt in puncto Q.



Sin autem ordinata altera MN ducatur inter verticem, &

 ordi-

ordinatam XQ; quadratum ordinatæ Ma ad hyperbolam, præcise æquabitur ipsi AM×Mb. Contra vero quadratum ordinatæ MN ad parabolam, æquale erit rectangulo AM×AS. Ergo parabola erit extra hyperbolam inter A & Q.

Secus vero, si ducatur ordinata altera IH infra Q, quadratum ordinatæ IF ad hyperbolam, valebit AI×IV; sed quadratum ordinatæ IH ad parabolam, valebit dumtaxat AI×IG. Ergo parabola cadet intra hyperbolam a Q in H.

Metire itaque parabolam: nam perspicuum est, excessum ab A in Q, compensari a defectu a Q in H, quantum satis, ne in praxi sensibiliter aberretur.

B
C O D
A R S
M N b
X a T
Q
E I HF G V

IN-

INDEX.

PROLEGOMENA.



PARS

PARS I.

De Parabola.

De Axe Parabolæ.

De Diametris Parabolæ.

De Parametro, seu Latere recto Parabolæ.

ter

Theor.

I. Per-

De Directrice Parabolæ.

ris,

De Quadratura Parabolæ.

De Proportionalitate Rectarum, & Rectangulorum in Parabola.

Theor.

De Parabolæ Segmentis, & Figuris maximis, eidem inscriptis.

Probl.

Deſcriptiones variæ, & Geneſes Parabolæ.

Defin.



PARS II.

De Ellipsi.

Theor.

De Focis Ellipseos.

sit

ctum a duabus parallelis, & diametro, æquari quadrilatero, facto a tangente hujus diametri, ejusque parallelà, interceptà ab axe, & diametro.

Casus Theorematis omnes exponuntur. *num.* 241. &c.

Coroll. Omnis recta linea, quæ intra ellipsim ducitur, parallela tangenti cujusvis diametri, bifariam secatur ab eadem diametro, cui proinde ordinata est. 250.

Defin. Quid sint diametri conjugatæ. 251.

Theor. IV. Quadratum ordinatim applicatæ ad diametrum quamlibet, est ad rectangulum sub segmentis; uti quadratum alterius conjugatæ est ad quadratum primæ diametri. 252.

Coroll. I. In ellipsi quadrata applicatarum ad quamcunque diametrum, sunt inter se, uti rectangula sub segmentis diametri. 253.

Coroll. II. Diameter ellipsis est recta quælibet, per centrum ducta, & utrinque ad ellipsim terminata. 254.

Coroll. III. Præter eas rectas, quæ transeunt per centrum, nulla alia recta linea potest esse ellipsis diameter. 255.

Coroll. IV. Omnia, quæ ex primaria ellipseos proprietate, respectu axium, deducuntur Theoremata, traduci jam possunt ad duas quascunque diametros conjugatas. 256.

Coroll. V. Hinc sequitur

I. Quodlibet perimetri punctum, alicujus diametri verticem esse;

II. Quamlibet rectam, per aliquod intra ellipsim punctum ductam, alicui diametro ordinatim applicatam esse;

III. Diametrum unam non posse parallelam esse ordinatis alterius conjugatæ, nisi & ista vicissim sit parallela ordinatis illius. 257.

Theor. V. Quælibet ellipsis diameter non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividit bifariam, quàm, quæ vel transeunt per centrum, vel ordinatim ad ipsam diametrum applicantur. 258.

Coroll. I. Si aliqua ellipsis diameter bisecet rectam, non transeuntem per centrum, & utrinque terminatam ad ellipsim; hæc erit ordinata ejusdem diametri. 259.

Coroll. II. Si recta bifariam secet duas parallelas, utrinque ad ellipsim terminatas; illa erit diameter. 260.

Coroll.

De mutua Diametrorum Ellipſeos inter ſe, & cum Axibus comparatione.

IV.

De

De Parametris Diametrorum Ellipsis, inter se mutuo comparatis.

De

De Tangentibus Ellipseos.

De Axibus, Diametris, ac Parametris Ellipseos inveniendis.

Probl.

De Secantibus Ellipseos.

De Sectoribus, & Segmentis Ellipseos.

De Ellipsibus similibus, earumque Segmentis.

De Mensura Ellipseos.

PARS

PARS III.

De Hyperbola.

Co-

nata,

De

De Conjugatis Diametris Hyperbolæ.

De Asymptotis Hyperbolæ.

vis

Theor.

De

De Parametris Diametrorum Hyperbolæ, inter se mutuo comparatis.

De

De Axibus, Focis, Diametris, Parametris, Asymptotis, & Hyperbolis similibus inveniendis, ac de Mensura Hyperbolæ.

FINIS.

